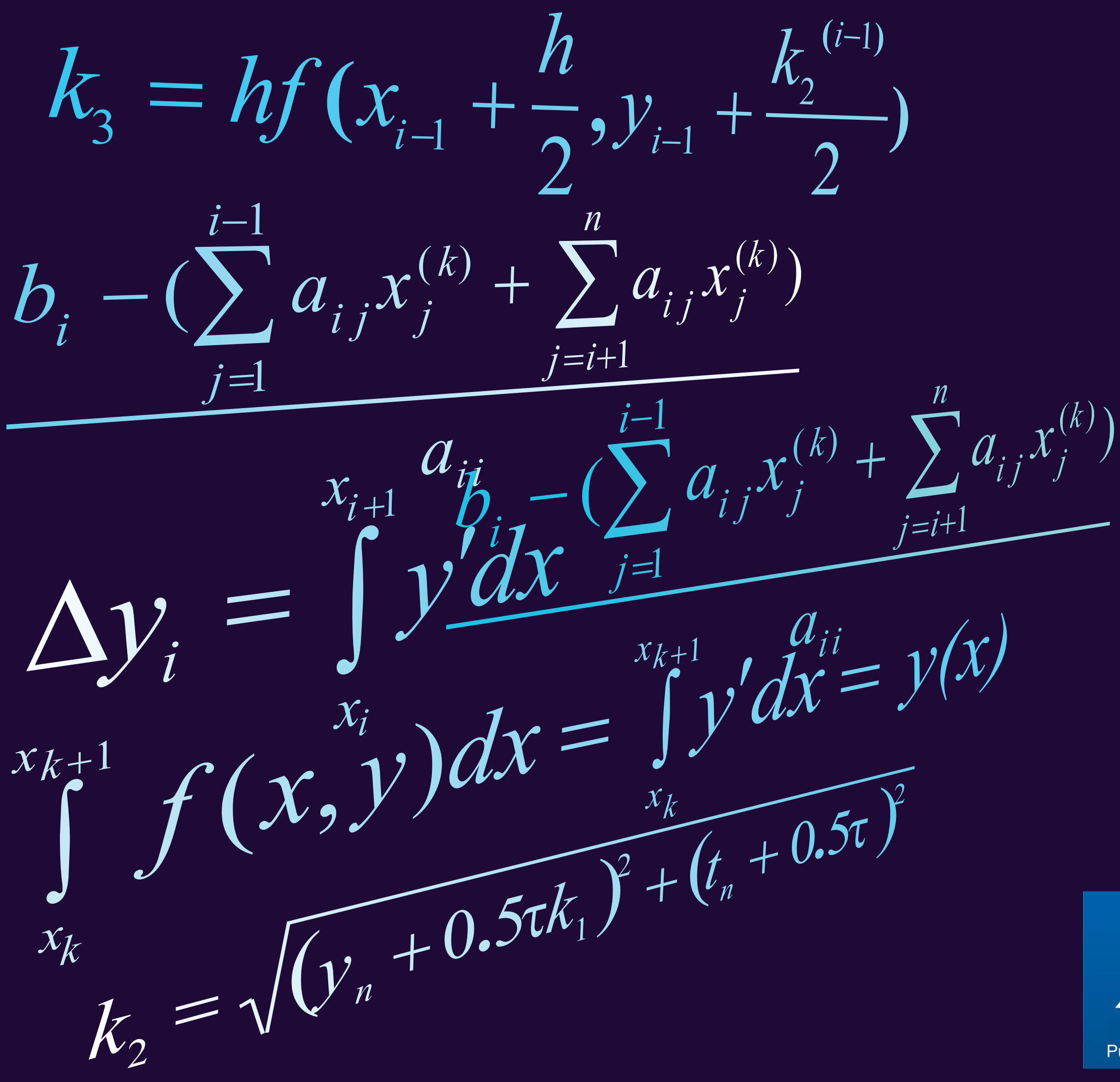
TEMEL VE GENEL MATEMATİK

Dr. E. Tuğba AKYÜZ



İKSAD Publishing House

TEMEL VE GENEL MATEMATİK

Dr. E. Tuğba AKYÜZ

İKSAD
Publishing House

(The Licence Number of Publicator: 2014/31220)
TURKEY TR: +90 342 606 06 75
USA: +1 631 685 0 853
E mail: iksadyayinevi@gmail.com
www.iksad.net

It is responsibility of the author to abide by the publishing ethics rules.

Iksad Publications – 2019©
ISBN: 978-625-7029-00-1
Cover Design: İbrahim Kaya
November / 2019
Ankara / Turkey
Size = 21 x 29,7 cm

İÇİNDEKİLER

Bu kitapta kullanılmış olan bazı sembollerin anlamları aşağıda verilmiştir:

$\forall$	$\rightarrow$	Her, bütün
$\exists$	$\rightarrow$	En az bir, bazı
$\vert$veya :	$\rightarrow$	Öyle ki
$\cong$	$\rightarrow$	Yaklaşık eşit
$>$	$\rightarrow$	Büyüktür
$<$	$\rightarrow$	Küçüktür
$\geq$	$\rightarrow$	Büyük veya eşittir
$\leq$	$\rightarrow$	Küçük veya eşittir
$\Rightarrow$	$\rightarrow$	İse (Tek yönlü gerektirme)
$\Leftrightarrow$	$\rightarrow$	Ancak ve ancak (Çift yönlü gerektirme)
$\in$	$\rightarrow$	Elemanıdır
$\notin$	$\rightarrow$	Elemanı değildir
$\wedge$	$\rightarrow$	ve (virgül işareti de "ve" anlamına gelir.)
$\vee$	$\rightarrow$	veya

Örneğin;

- $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \ \mathrm{V} \ x = -3$
  $x = 3 \Longrightarrow x^2 = 9$

- " A kümesi öyle x sayılarından oluşur ki, bu sayılar $x^2 - 10 \geq 0$ şartını sağlayan tamsayılardır" ifadesinin matematiksel yazılımı:
  $A = \{x : \ x^2 - 10 \geq 0 \, , x \in \mathbb{Z}\} \ \ veya \ \ A = \{x \,|\, x^2 - 10 \geq 0 \, , x \in \mathbb{Z}\}$

- "Bütün pozitif x reel sayıları için x+y = 4 olacak şekilde en az bir y negatif reel sayısı vardır" ifadesinin matematiksel yazılımı:
  $\forall \ x \in \mathbb{R}^+$ için $x + y = 4$ o.ş. $\exists$ $y \in \mathbb{R}^-$ vardır

KÜMELER

Bu bölümde kümlere ile ilgili temel kavramları ve özelliklerini özet olarak tekrar hatırlayacağız.

Küme: Belli özellikteki elemanlar topluluğuna "*küme*" denir. Küme adları genellikle büyük harflerle ifade edilir. Bir kümeye ait olan ve olmayan elemanlar ise aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$\in$ → Bir kümeye ait elemanları göstermek için kullanılırı (elemanıdır)

$\notin$ → Bir kümeye ait olmayan elemanları göstermek için kullanılırı (elemanı değildir)

$5 \in A$ → 5 sayısı A kümesinin elemanıdır

$a \notin X$ → a, X kümesinin elemanı değildir

<u>Küme gösterimleri:</u>

1) Açık Gösterim (liste yöntemi): Kümenin tüm elemanları listelenir.
   Örneğin; A= {2,4,6,8,10}

2) Kapalı Gösterim (ortak özellik yöntemi):Kümenin elemanları yerine bu elemanların özellikleri yazılır.
   Örneğin ; $A = \{$ 2'den 10'a kadar olan çift sayılar $\}$

   $A = \{ x \mid \quad x = 2n\,, \ n = 1,2,3,4,5 \}$

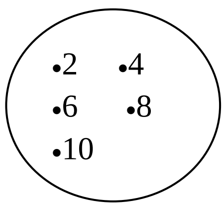
   $A = \{ x : \quad x = 2n\,, \ 1 \le n \le 5, \ n \in \mathbb{Z} \}$

   Örneğin ; $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$ kümesini kapalı olarak ifade edelim:

   $A = \{ x : \ x = n^2, \ 1 \le n \le 6 \ \wedge \ n \in \mathbb{Z}\}$

3) Venn Şeması:

A



SORU 1: Tek sayılar kümesini kapalı olarak ifade ediniz.

SORU 2: A $= \{2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65\}$ kümesini kapalı olarak ifade ediniz

SORU 3: B = { a | $a = 2x^2 + x - 2$, $0 \leq x \leq 4$, $x \in \mathbb{Z}^+$ } kümesini açık olarak ifade ediniz

SORU 4: K $= \{x \ : \ x = \frac{n}{2} + 1, n \in \mathrm{N}\}$ kümesini açık küme şeklinde ifade ediniz.

Boş küme: Hiç elemanı olmayan kümeye "*boş küme*" denir. Ø veya {} sembollerinden biri ile gösterilir. {Ø} ifadesinin boş kümeyi göstermediğine dikkat ediniz.

Evrensel küme: Bazı problemlerde birbirleri ile ilişkili birçok küme kullanılabilir. Böyle durumlarda söz konusu kümeleri yeterince büyük tek bir küme altında toplamak yararlı olur. Problemden probleme değişebilecek böyle bir kümeye *"evrensel küme"* denir. E ile gösterilir.

Alt küme: A ve B iki küme olsun. A'nın her elemanı B'nin de elemanı ise A kümesi B'nin "*altkümesidir*" denir (B kapsar A'yı da denilebilir).

$A \subset B \rightarrow$ A altkümesidir B'nin

$B \supset A \rightarrow$ B kapsar A'yı

NOT:

- Boş küme her kümenin alt kümesidir.
- Her küme kendisinin altkümesidir.

Öz altküme: Bir kümenin kendisinden farklı olan tüm altkümelerine *"öz altküme"* denir.

NOT:

Bir A kümesinin eleman sayısı n ise (Yani $s(A) = n$ ise);

- A'nın alt küme sayısı 2^n tanedir.
- A'nın öz altküme sayısı $2^n - 1$ tanedir.

ÖRNEK 1: A={1,2,5,8}kümesi verilsin;

a) A'nın altküme sayısı nedir?

b) A'nın özaltküme sayısı nedir?

c) Altkümeleri sıralayınız.

Cevap: Eleman sayısı $n = 4$ olduğuna göre

a) A'nın altküme sayısı $=2^n = 2^4 = 16$ tanedir.

b) A'nınözaltküme sayısı$=2^n - 1 = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ tanedir.

c) {1,2,5,8}, Ø, {1}, {2}, {5}, {8}, {1,2}, {1,5}, {1,8}, {2,5}, {2,8}, {5,8}, {1,2,5}, {1,2,8}, {2,5,8}, {1,5,8}

ÖRNEK 2: 7 elemanlı bir kümenin altküme ve özaltküme sayısı nedir?

Altküme sayısı $=2^n = 2^7 = 128$

Öz altküme sayısı $=2^n - 1 = 2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$

Küme İşlemleri :

$A \cup B = \{x : \; x \in A \; \vee \; x \in B\}$ → Birleşim

$A \cap B = \{x : \; x \in A \; \wedge \; x \in B\}$ → Kesişim

$A \setminus B = A - B = \{x : \; x \in A \; \wedge \; x \notin B\}$ → Fark

$A^t = A' = \{x : \; x \notin A \; \wedge \; x \in E\}$ →Tümleyen

ÖRNEK 3: $A = \{1,2,5,9\}$, $B = \{2,4,5,8\}$, $C = \{1,5,6,8\}$ kümeleri verilsin.

a) $A \cup B$ =? b) $B \setminus A$ =? c) $A \cap C$ =?

d) $A \cap B \cap C$=? e) $C^t \cap A$=? f) $(B \cup C) \setminus A$= ? g) $(A \setminus C)^t$ =?

Cevap : Bu soru için evrensel küme $E = \{1,2,4,5,6,8,9\}$ dir.

a) $A \cup B = \{1,2,4,5,8,9\}$

b) $B \setminus A = \{4,8\}$

c) $A \cap C = \{1,5\}$

d) $A \cap B \cap C = \{5\}$

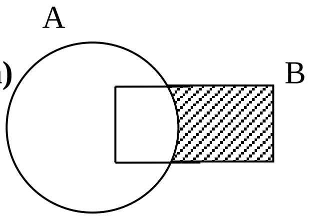
e) $C^t \cap A = \{2,4,9\} \cap \{1,2,5,9\} = \{2,9\}$

f) $(B \cup C) \setminus A = \{2,4,5,6,8\} \setminus \{1,2,5,9\} = \{4,6,8\}$

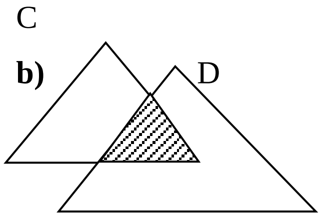
g) $(A \setminus C)^t = (\{2,9\})^t = \{1,4,5,6,8\}$

ÖRNEK 4: Aşağıdaki taralı alanları küme işlemi olarak gösteriniz.

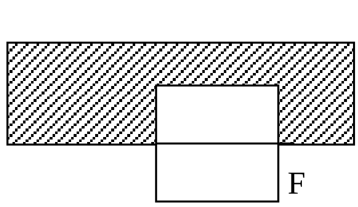
a)



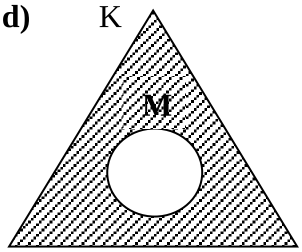
b)



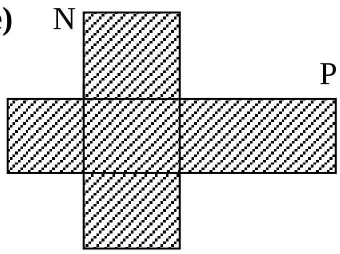
c)



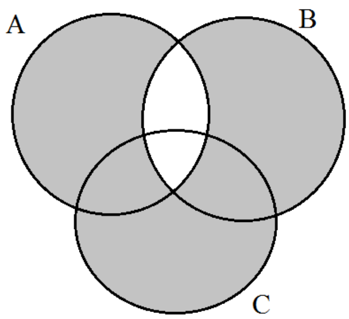
d)



e)



f)



Cevap :

a) B\A **b)** $C \cap D$ **c)** E\F

d) M^t veya K\M **e)** $N \cup P$ **f)** $(A \cap B)^t$

Kartezyen Çarpım: A ve B boş olmayan herhangi iki küme olsun. $a \in A$ ve $b \in B$ olmak şartı ile (a,b) sıralı ikililerinden oluşan kümeye *"A' dan B' ye kartezyen çarpım kümesi"* denir. $A \times B$ şeklinde gösterilir.

$$A \times B = \{(a, b) :\ a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

$(a, b) \neq (b, a)$ olduğundan $A \times B \neq B \times A$ olduğuna dikkat ediniz. Özel hallerde eşit olsa da genel kural böyle bir eşitliğin olmadığıdır.

Kartezyen çarpımın özellikleri:

1. $A \times B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A = \emptyset \quad \vee \; B = \emptyset$
2. $A \times (B \cup C) = (\, A \times B) \cup (A \times C)$
3. $A \times (B \cap C) = (\, A \times B) \cap (A \times C)$
4. $A \times (B \backslash C) = (\, A \times B) \setminus (A \times C)$

SORU 5: A = {3,4,5} , B = {4,6} , C ={3,6} kümeleri için yukarıdaki 2,3 ve 4. özellikleri ispatlayınız.

ÖRNEK 5: $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{2,4\}$ kümeleri için $X \times Y$ ve $Y \times X$ kümelerini yazınız.

Çözüm: $X \times Y = \{1,2,3\} \times \{2,4\} = \{(1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (3,2), (3,4)\}$

$Y \times X = \{2,4\} \times \{1,2,3\} = \{(2,1), (2,2), (2,3), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

NOT: İki kümenin kartezyen çarpım kümesinin eleman sayısı, kullanılan kümelerin eleman sayılarının çarpımı kadardır.

$$s(A \times B) = s(A).s(B)$$

Bağıntı: A ve B boş olmayan iki küme olsun. $A \times B$ nin her bir altkümesine *"A'dan B'ye bir bağıntı"* denir.

ÖRNEK 6: $A = \{2,4,9,11,18\}$, $B = \{3,4,5,7,10\}$ kümeleri için aşağıdaki β kümelerinin bağıntı olup olmadığını inceleyiniz.

$\beta_1 =$ { (2,3), (2,5), (9,10)}	A'dan B'ye bağıntıdır
$\beta_2 =$ { (4,4), (11,7), (3,2), (9,5) }	bağıntı değildir
$\beta_3 =$ { 4,2), (3,18), (7,4) }	B'den A'ya bağıntıdır
$\beta_4 =$ { (18,10) }	A'dan B'ye bağıntıdır
$\beta_5 =$ { (4,5), (2,7), (2,3), (6,10) }	bağıntı değildir
$\beta_6 =$ { (3,9), (4,9),(5,9),(7,9),(10,9)}	B'den A'ya bağıntıdır

Kümelerle İlgili Bazı Özellikler

1) $A \cup \emptyset = A\,,\ \ A \cap \emptyset = \emptyset$
2) $A \cup E = E\,,\ \ A \cap E = A$
3) $\emptyset^t = E\,,\ E^t = \emptyset$
4) $A \subset B\,,\ B \subset C\ \Rightarrow A \subset C$
5) $A \subset B\ \Leftrightarrow A \cup B = B\,,\ \ A \cap B = A$
6) $\left.\begin{matrix} A \subset C \\ B \subset C \end{matrix}\right\} \Rightarrow\ \ (A \cup B) \subset C$
7) $\left.\begin{matrix} A \subset B \\ A \subset C \end{matrix}\right\} \Rightarrow\ \ A \subset (B \cap C)$
8) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
9) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
10) $A \subset B\ \Rightarrow B^t \subset A^t$
11) $(A \cup B)^t = B^t \cap A^t$

    $(A \cap B)^t = B^t \cup A^t$
12) $A \backslash B = A \cap B^t$

Birleşim ve Kesişim Kümelerinin Eleman Sayıları :

s(A) → A kümesinin eleman sayısı

s(B) → B kümesinin eleman sayısı

olmak üzere;

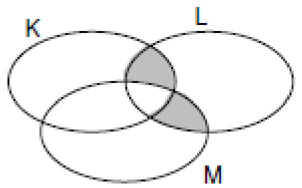
$$s(A \cup B)\ =\ s(A)\ +\ s(B) - s(A \cap B)$$
$$s(A \cap B)\ =\ s(A)\ +\ s(B) - s(A \cup B)$$

şeklindedir.

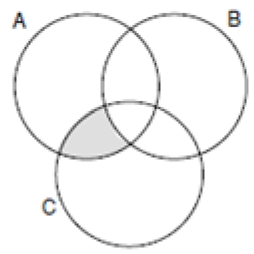
SORULAR

1) A, B ve C kitaplarından en az birini okuyanların oluşturduğu 33 kişilik bir toplulukta A veya B kitabını okuyanlar 28, B veya C kitabını okuyanlar 29, A veya C kitabını okuyanlar 30 kişidir. Buna göre toplulukta bu kitaplardan yalnız birini okuyanların sayısı kaçtır?
2) Bir sınıftaki öğrencilerin %50'si matematikten, %70'i İngilizcedenbaşarılıolmuştur. Öğrencilerin %10'u ise her iki dersten de başarısızolmuşlardır. Her iki dersten başarılı olan öğrenci sayısı 15 ise sadece bir dersten başarılı olan kaç öğrenci vardır?
3) $s(A \cap B^t) = 3,\ s(B \cap A^t) = 17,\ s(B) = 3s(A)$ ise $s(A \cup B) =$?
4) $C \subset B$, $A \cap B = \emptyset$ olmak üzere, $s(B) = 3s(C)$, $s(A^t) = 15$, $s(A^t \cap B^t) = 3$ ise $s(C)$ =?
5) Bir turist grubunda Almanca bilenlerin sayısı 16, İngilizce bilenlerin sayısı 14, Almanca bilmeyenlerin sayısı 18 olduğuna göre bu grupta İngilizce bilmeyen kaç kişi vardır?
6) 1'den 436'ya kadar olan sayılarda (1 ve 436 dahil) kaç tanesi 5 veya 7 ile kalansız bölünebilir?
7) Matematik ve Fizik dersinin seçmeli olduğu 33 kişilik bir sınıfta 14 kişi matematik dersi almaktadır. 20 kız öğrenciden 12 si fizik dersi alıyor ise bu sınıfta fizik dersi alan kaç erkek öğrenci vardır?
8) Bir kutuda kırmızı, beyaz, mavi olmak üzere 33 tane kalem vardır. Beyaz olanlar ile mavi olmayanların toplamı 32, kırmızı olanlar ile beyaz olmayanların toplamı 35 tir. Kutuda her renkten kaç kalem vardır?
9) $A \cap B$ kümesinin 63 tane özaltkümesi , $A \cup B$ kümesinin ise 1 elemanlı altküme sayısı 18'dir. $s(A^t) - s(B^t) = 6$ise $s(A) =$?
10) A ve B kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleridir. $s(A \setminus B) = 3,\ s(B \setminus A) = 2$, $A \cap B \neq \emptyset$, $s(E) = 19$, $s(B^t) = 12$ olduğuna göre $s(A) =$?
11) Aşağıdaki şekillerde görülen taralı kısımlar küme gösterimi olarak nasıl yazılır?

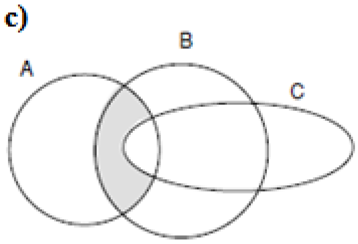
a)



b)



c)



12) Bir fakültede 3 dersten geçenlerle kalanların sayısı şöyledir: En çok iki dersten geçen 44 öğrenci, en çok bir dersten geçen 35 öğrenci, en az iki dersten geçen 18 öğrenci. Buna göre her üç dersten de geçen kaç öğrenci vardır?

------------------------------------ ◈ ------------------------------------

SAYILAR

Bu bölümde sayılarla ilgili temel bilgileri özetleyerek hatırlayacağız.

Sayı Kümeleri

$\mathbb{N}= \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ → **Doğal Sayılar Kümesi**

Bazı kaynaklarda "0" doğal sayılar kümesine dahil edilmez. Aslında "0" ın doğal sayı olup olmadığı matematikte bir tartışma konusudur. Ancak genel kabul ve matematik ders kitaplarının büyük çoğunluğunda "0" bir doğal sayı olarak geçtiğinden dolayı bu kaynakta da bu kabule uyacağız.

$\mathbb{Z} = \{\underbrace{\dots, -3, -2, -1}_{\mathbb{Z}^-}, 0, \underbrace{1, 2, \dots}_{\mathbb{Z}^+}\}$ → **Tam Sayılar Kümesi**

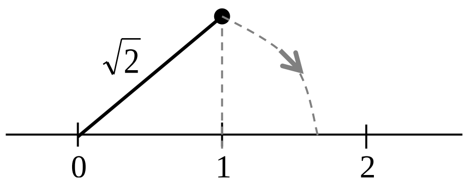
$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$

$\mathbb{Q}= \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ → **Rasyonel Sayılar Kümesi** (İki tamsayının bölümü şeklinde yazılabilen sayılardır)

$\mathbb{I} = \mathbb{Q}^t$ → **İrrasyonel Sayılar Kümesi** (rasyonel olmayan veya iki tamsayının bölümü olarak yazılamayan sayılar)

$\mathbb{R}=\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^t$ → **Reel Sayılar Kümesi** (Gerçel Sayılar Kümesi)

İrrasyonel sayı kavramını biraz daha açıklayacak olursak; sayı doğrusu üzerindeki rasyonel sayılar taşındıktan sonra geriye kalan noktaların başlangıç noktasına olan uzaklıklarıdır.



Örneğin $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π =3,1415… , e =2,718… sayıları birer irrasyonel sayıdır.

Sayı kümeleri arasında aşağıdaki kapsama bağıntısı yazılabilir:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Bu sayı kümelerine ilave olarak, karmaşık veya kompleks sayılar kümesi vardır ki, bu kümeyi daha geniş olarak ileride ele alacağız. Şimdilik bu kümenin tanımını yapmakla yetineceğiz. Karmaşık sayılar reel ve sanal olmak üzere iki kısımdan oluştuklarından bu isim verilmiştir. Sanal kısımdan kasıt "$\boldsymbol{i}$" ile temsil ettiğimiz kısımdır. Reel sayılar kümesinde karekök içinde negatif sayı olamayacağından, bu sayıları $i=\sqrt{-1}$ ile göstererek $a+bi$ şeklinde yazılan ve genellikle z, w gibi harflerle gösterilen sayı kümesidir karmaşık sayılar. Sonuç olarak küme gösterimini şöyle yazabiliriz:

$$\mathbb{C}=\{\ z\ \mid\ z=a+bi\ ,\ \ a,b\in R,\ \ i=\sqrt{-1}\}$$

Bu tanıma göre $z=a+0.i$ sayısı da bir karmaşık sayıdır. Yani sadece reel kısmı olan sayılar da karmaşık sayıdır. Bu ise karmaşık sayıların, reel sayıları da kapsadığı anlamına gelir. O halde en geniş sayı kümesi $\mathbb{C}$ kümesidir.

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

Not: Bir denklemin çözüm kümesini bulurken elde edilen çözümlerin soruda verilen kümeye ait olup olmadığına bakılarak çözüm kümesi yazılır. Eğer soruda bir küme belirtmemişse reel sayılar için çözüm yapılır.

ÖRNEK 1: $2x^2-8=0$ denkleminin $\mathbb{Z}^+$ da çözüm kümesi nedir?

Çözüm:

$$2x^2-8=0$$
$$x^2=4$$
$$x=\mp 2$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\in\mathbb{Z}^+ \\ -2\notin\mathbb{Z}^+ \end{array}\right\}\ \mathbb{Z}^+ \text{ için Ç.K} = \{2\}$$

ÖRNEK 2: $2x^2+5x-12=0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $2x^2+5x-12=0$

$$\begin{array}{cc} 2x & -3 \\ x & 4 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{8x-3x=5x} \end{array}$$

$$(2x-3).(x+4)=0$$
$$2x-3=0\ \lor\ x+4=0$$
$$x=\frac{3}{2}\ \lor\ x=-4$$

Soruda bir küme belirtilmediğinden, $\mathbb{R}$için çözüm kümesi = $\left\{\frac{3}{2},-4\right\}$ şeklinde olur.

Eğer doğal sayılar için cevap istenseydi: $\mathbb{N}$için çözüm kümesi = $\emptyset$

Eğer tamsayılar için cevap istenseydi: $\mathbb{Z}$için çözüm kümesi = {-4}

Negatif ve Pozitif Sayılar: Sıfırdan büyük sayılara *"pozitif sayı"*, sıfırdan küçük sayılara *"negatif sayı"* denir. Yani;

$a > 0$ ise **a** pozitif sayı

$a < 0$ ise **a** negatif sayı

Not:
$$(+).(+) = (+) \quad (+):(+) = (+)$$
$$(+).(-) = (-) \quad (+):(-) = (-)$$
$$(-).(+) = (-) \quad (-):(+) = (-)$$
$$(-).(-) = (+) \quad (-):(-) = (+)$$

- Toplamada aynı işaretliler toplanır ve ortak işaret yazılır.
- Çıkarmada büyük sayıdan küçük sayı çıkartılıp, büyük olanın işareti yazılır.

Tek ve Çift Sayılar: 2 ile tam bölünebilen sayılara *"çift sayı"*, 2 ile tam bölünemeyen sayılara *"tek sayı"* denir. Problem çözerken genellikle çift sayılar $2n$, tek sayılar $2n+1$ veya $2n-1$ ile gösterilir.

$$T = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$
$$Ç = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

Asal Sayılar: 1 ve kendisinden başka hiçbir tam sayı ile bölünemeyen 1'den büyük doğal sayılara *"asal sayılar"* denir.

$$\text{Asal Sayılar} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots\}$$

Aralarında Asal Sayılar: 1'den başka ortak tamsayı böleni olmayan doğal sayı çiftlerine *"aralarında asal sayılar"* denir.

ÖRNEK 3: 5 ve 6 aralarında asaldır.

17 ve 19 aralarında asaldır.

10 ve 21 aralarında asaldır.

12 ve 33 aralarında asal değildir (ortak bölen 3 olduğu için).

Not: Ardışık iki sayı aralarında asaldır.

Bir Doğal Sayının Asal Çarpanları: 1'den büyük her doğal sayı, 1 ya da daha çok asal sayının, ya da bunların kuvvetlerinin çarpımından oluşur. Bu çarpıma o doğal sayının *"asal çarpanları"* denir.

$4 = 2^2$ $\qquad$ $360 = 2^3.3^2.5$

$60 = 2^2.3.5$ $\qquad$ $5040 = 2^4.3^2.5.7$

OBEB ve OKEK

OBEB $\longrightarrow$ **O**rtak **B**ölenlerin **E**n **B**üyüğü
OKEK $\longrightarrow$ **O**rtak **K**atların**E**n **K**üçüğü

Bu terimler EBOB ve EKOK olarak da kullanılır.

ÖRNEK 4: 420 ve 180 sayılarının obeb ve okek'ini bulunuz

Çözüm:

$$\begin{array}{rr|c} 420 & 180 & 2 \\ 210 & 90 & 2 \\ 105 & 45 & 3 \\ 35 & 15 & 3 \\ 35 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 7 \\ 1 & & \end{array}$$

obeb (420,180) = $2^2.3.5 = 60$

okek (420, 180) = $2^2.3^2.5.7 = 1260$

(yuvarlak içine alınanlar ortak bölenler.)

SORU: $okek(60,90) =?$ $obeb(180,210) =?$

Kural: İki sayının obeb ve okeki arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$\boxed{a.b = obeb(a,b).okek(a,b)}$$

ÖRNEK 5: Obebi 3, okeki 60 olan iki sayıdan biri 12 ise diğeri nedir?

Çözüm: $a.b = obeb(a,b).okek(a,b)$

$12.b = 3.60$

$b = 15$

Ardışık Doğal Sayılar: Belli bir kurala göre birbirini takip eden doğal sayılara *"ardışık sayılar"* denir.

Örneğin;	1,2,3,4,…	ardışık tamsayılar
	2,4,6,8,…	ardışık çift tamsayılar
	1,3,5,7,…	ardışık tek tamsayılar
	5,10,15,20,…	5'den başlayan 5'er 5'er ardışık tamsayılar
	2,7,12,17,…	2'den başlayan 5'er 5'er ardışık tamsayılar

Dizinin Terim Sayısı: Terim sayısını “n” ile gösterelim.

$$\mathbf{n = \frac{Son\ Terim - İlk\ Terim}{Artış\ Miktarı} + 1}$$

ÖRNEK6: 1, 2, 3,... , 35dizinin terim sayısı kaçtır?

Çözüm: $\mathbf{n = \frac{35-1}{1} + 1 = 35}$

ÖRNEK7: 7,9, 11,... , 43 dizinin terim sayısı kaçtır?

Çözüm: $\mathbf{n = \frac{43-7}{2} + 1 = 18 + 1 = 19}$

Ardışık Doğal Sayıların Sonlu Toplamları

n bir doğal sayı olmak üzere;

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n.(n+1)$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Belli bir dizinin sonlu toplamı için aşağıdaki formül de kullanılabilir:

$$\text{Toplam} = \frac{(\text{ilk terim} + \text{son terim}).\text{terim sayısı}}{2}$$

Yukarıdaki formül şu şekilde de yazılabilir:

$$\text{Toplam} = \frac{(\text{Son} + \text{İlk}).(\text{Son} - \text{İlk} + \text{Artış mik.})}{2.\text{artış miktarı}}$$

ÖRNEK 8: $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99 = ?$

Çözüm: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$ olduğuna göre $n = 99$ olup;

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 = \frac{99.100}{2} = 99.50 = 4950$$

ÖRNEK 9: $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + 121 = ?$

Çözüm: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$olduğuna göre önce n'i bulalım:

$2n-1=121$

$2n=122$

$n=61$

$1+3+5+\ldots\ldots+121=n^2=61^2=3721$

ÖRNEK 10: $2+4+6+\ldots\ldots+150=?$

Çözüm: $2+4+6+\cdots+2n=n.(n+1)$olduğuna göre önce n'i bulalım:

$2n=150$

$n=75$

$2+4+6+\ldots\ldots+150=n.(n+1)=75.76=5700$

ÖRNEK 11: $20+21+22+\ldots\ldots+93=?$

Çözüm: $\text{Toplam}=\dfrac{(\text{Son}+\text{İlk}).(\text{Son}-\text{İlk}+\text{Artış mik.})}{2.\text{artış miktarı}}$

$$=\frac{(93+20).(93-20+1)}{2.1}=\frac{113.74}{2}=4181$$

ÖRNEK 12: $15+18+21+24+\ \ldots\ldots+60=?$

Çözüm: $\text{Toplam}=\dfrac{(\text{Son}+\text{İlk}).(\text{Son}-\text{İlk}+\text{Artış mik.})}{2.\text{artış miktarı}}$

$$=\frac{(60+15).(60-15+3)}{2.3}=\frac{75.48}{6}=600$$

Bölünebilme Kuralları

2 ile Bölünebilme: Birler basamağında sıfır veya çift olan her doğal sayı 2 ile tam bölünebilir.

3 ile Bölünebilme: Bir sayının rakamlarının sayı değerlerinin toplamı 3 veya 3'ün katı ise bu doğal sayı 3 ile tam bölünebilir. Örnek: 1353, 360

Uyarı: Bir sayının 3'e bölümünden kalan rakamları toplamının 3'e bölümünden kalana eşittir. Örneğin; 478'in 3'e bölümünden kalan, (4+7+8) :3 olup kalan=1 dir.

4 ile Bölünebilme: Son iki basamağı 00 veya 4'ün katı ise bu doğal sayı 4 ile tam bölünebilir. Örnek: 12**00,** 15**16**

5 ile Bölünebilme: Birler basamağı 0 veya 5 olan her doğal sayı 5 ile tam bölünür.

Örnek: 2545, 3950

7 ile Bölünebilme: Verilen bir sayının 7 ile bölünüp bölünmediğini bulmak için doğrudan bölme işlemi yapmak çoğu zaman daha kolaydır. Ancak, öğrenciler çok merak ettiği için **2-3-1 kuralı**nı kısaca açıklayalım:

- 3 basamaklı sayılar için sayının altına 2,3,1 yazıp tüm basamakları eşleştiği rakamla çarpar, sonuçları toplarız. Bulduğumuz sayı 7'nin katıysa, sayı da 7'ye bölünür.

Örneğin; 679 sayısı için 2.6+3.7+1.9=42 olup 7'ye bölünür.

- 3'ten fazla basamağı olan sayıları sağdan başlayarak 3'er 3'er gruplarız ve her 3'lünün altına 231 yazıp aynı işlemi tekrarlarız. Eğer en solda 2 basamak kalmışsa sadece rakamları 3 ve 1, tek basamak kalmışsa da sadece 1 ile çarparız. Gruplara da sağdan başlayarak 1,2,3.. diye numara verirsek numarası bakımından, tek indislileri kendi aralarında, çift indislileri de kendi aralarında toplayıp farklarını alırız. Sonuç 7'nin katıysa, ana sayımız da 7 ile bölünür. Aksi takdirde, bölünmez.

Örneğin; 72540216 sayısında Grup1: 216, Grup2: 540 ve Grup3: 72'dir.

Grup 1: $2.\mathbf{2}+3.\mathbf{1}+1.\mathbf{6}=\mathbf{13}$

Grup 2: $2.\mathbf{5}+3.\mathbf{4}+1.\mathbf{0}=\mathbf{22}$

Grup 3: $3.\mathbf{7}+1.\mathbf{2}=\mathbf{23}$

$(13+23)-22=14$ sayısı 7 ile bölündüğü için 72.540.216 da 7 ile tam olarak bölünür.

8 ile Bölünebilme: Son üç basamağı 000 veya 8'in katı olan doğal sayılar 8'e tam bölünür.

Örnek : 13**000**, 1**064**, **184**

9 ile Bölünebilme: Bir sayını rakamlarının sayı değerlerinin toplamı 9 veya 9'un katı ise bu doğal sayı 9 ile tam bölünebilir. Örnek: 9999, 4050

Uyarı: Bir sayını 9'a bölümünden kalan, rakamları toplamının 9'a bölümünden kalana eşittir. Örneğin; 786:9 işleminde kalan, (7+8+6) :9 olup kalan3 tür.

10 ile Bölünebilme:

Birler basamağı sıfır olan her doğal sayı 10 ile tam bölünebilir. Örnek: 375**0,** 590**0**

11 ile Bölünebilme: Verilen sayıların rakamları sağdan sola doğru birer basamak atlayarak toplanır. Arada kalanlar da toplanır. Bulunan sayıların farkı sıfır 11 veya 11'in katı ise bu sayı 11 ile tam bölünebilir.

Örneğin; 96943 sayısı için $9+9+3-(6+4)=21-10=11$ olur.

O halde bu sayı 11 ile tam bölünür.

25 ile Bölünebilme: Son iki basamağı 00, 25 veya 25'in katı ise bu doğal sayı 25 ile tam bölünebilir. Örnek:12**00,** 12**50**

6, 12, 15, 18 Sayıları ile Bölünebilme:

Bu sayıları çarpanları yazılır. Çarpanların 1'in dışında ortak böleni olmamalıdır.

- 6= 2 . 3 (Hem 2 hem de 3 ile bölünebilen sayılar 6 ile tam bölünebilir.)
- 12=3 . 4 (Hem 3 hem de 4 ile bölünebilen sayılar 12 ile tam bölünebilir.)
- 15=3 . 5 (Hem 3 hem de 5 ile bölünebilen sayılar 15 ile tam bölünebilir.)
- 18=2 . 9(Hem 2 hem de 9 ile bölünebilen sayılar 18 ile tam bölünebilir.)

Ondalık Sayılarda Yuvarlama: Bir ondalık sayıyı yuvarlamak demek, bu sayıya yaklaşık olarak eşit olan daha az basamaklı bir ondalık sayıyı bulmak demektir.

Bir ondalık sayıyı istenilen basamağında yuvarlama yapmak için, istenilen basamağın sağındaki rakama bakılır. Bu rakamın sayı değeri;

- 5 veya 5'ten büyükse istenilen basamağın sayı değeri 1 arttırılıp, sağındaki basamaklar atılır.
- 5'ten küçük ise istenilen basamağın sayı değeri aynen alınıp sağındaki basamaklar atılır.

ÖRNEK 13: 4,284601 ondalık kesrini virgülden sonra farklı basamaklarda yuvarlayalım:

4, 284601 ≅ 4,28460
4, 284601 ≅ 4,2846
4, 284601 ≅ 4,285
4, 284601 ≅ 4,29
4, 284601 ≅ 4,3

Faktöriyel: 1'den n'e kadar olan doğal sayıların çarpımına *"n faktöriyel"*denir ve n! şeklinde gösterilir.

$$n! = 1.2.3 \ldots n$$
$$n! = n.(n-1).(n-2) \ \ldots \ 3.2.1$$
$$n! = n.(n-1)!$$

Örneğin; 5! = 5.4.3.2.1 = 120

8! = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320

ÖRNEK 14: $\frac{10!-9!}{8!}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm: $\frac{10.9.8!-9.8!}{8!} = \frac{\cancel{8!}(10.9-9)}{\cancel{8!}} = 81$

ÖRNEK 15: $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 42$ ise n=?

Çözüm: $\dfrac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!} = n.(n\text{-}1) = 42 \Rightarrow n^2\text{-}n\text{-}42 = 0$

+6 -7

$n_1 = -6$ × negatif olamaz

$n_2 = 7$ ✓

Cevap: $n=7$

ÖRNEK 16: $\dfrac{n!}{(n-3)!} = (n-2).\dfrac{15!}{13!}$ olduğuna göre n =?

Çözüm: $\dfrac{n.(n-1).(n-2).(n-3)!}{(n-3)!} = (n-2).\dfrac{15.14.13!}{13!}$

$n.(n-1).(n-2) = (n-2).15.14$

$n.(n-1) = 15.14$

$n = 15$

Devirli Sayıların Kesirli Sayı Olarak Yazılması

Bir bölme işleminde virgülden sonra belli basamaklar aynen tekrar ederek devam ediyorsa bu sayı *"devirli sayı"*dır. Örneğin;

$\dfrac{10}{3} = 3{,}333\ldots = 3{,}\bar{3}$, $\dfrac{25}{6} = 4{,}1666\ldots = 4{,}1\bar{6}$

a,b,c,d birer rakam olmak üzere $A = a,b\overline{cd}$ devirli sayısının rasyonel karşılığını bulalım.

$$A = a,b\overline{cd} \Rightarrow 1000A = abcd,\overline{cd}$$
$$-\quad 10A = ab,\overline{cd}$$
$$990A = abcd - ab$$
$$\Rightarrow \quad A = \frac{abcd - ab}{990}$$

elde edilir. Bu ifadeyi kurallaştırırsak şu şekilde olur:

$$\boxed{A = \frac{Sayının\ tamamı - Devretmeyen\ kısım}{\text{"}Devreden\ kadar\ 9\text{" "}Devretmeyen\ kadar\ 0\text{"}}}$$

ÖRNEK 15: Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

$$0,\overline{7} = \frac{7}{9} \quad , \qquad 0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad , \qquad 0,\overline{2} = \frac{2}{9}$$

$$0{,}6\overline{2} = \frac{62-6}{90} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45}$$

$$3{,}1\overline{85} = \frac{3185-31}{990} = \frac{1577}{495}$$

$$14,\overline{32} = \frac{1432-14}{99} = \frac{1418}{99}$$

$$23{,}95\overline{6} = \frac{23956-2395}{900} = \frac{21561}{900} = \frac{7187}{300}$$

$$0,\overline{819} = \frac{819}{999} = \frac{91}{111}$$

$$6{,}00\overline{4} = \frac{6004-600}{900} = \frac{5404}{900} = \frac{1351}{225}$$

ÖRNEK 16: $\frac{(3{,}\overline{5})^2-(2{,}\overline{4})^2}{2{,}\overline{2}}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm: $$\frac{(3{,}\overline{5})^2-(2{,}\overline{4})^2}{2{,}\overline{2}} = \frac{\left(\frac{32}{9}\right)^2-\left(\frac{22}{9}\right)^2}{\frac{20}{9}} = \frac{\frac{32^2-22^2}{81}}{\frac{20}{9}}$$

$$= \frac{32^2-22^2}{81} \cdot \frac{9}{20}$$

$$= \frac{(32-22).(32+22)}{9.20}$$

$$= \frac{10.54}{9.20}$$

$$= 3$$

SORULAR

1) $2[6a-(b-2a)-2(4a-b)]+2(a-b)=?$

2) İki basamaklı rakamları farklı en küçük tamsayı ile üç basamaklı en küçük doğal sayının toplamı kaçtır?

3) Rakamları birbirinden farklı olan üç basamaklı $3KM$ sayısı 3 ve 5 ile kalansız bölünebiliyor. Buna köre K kaç farklı değer alabilir?

4) Rakamları birbirinden farklı beş basamaklı $28A9B$ sayısının 9 ile bölümünden kalan 7, aynı sayının 5 ile bölümünden kalan ise 1 dir. $A\neq 0$ olduğuna göre $A-B=?$

5) $4^{10}.25^{9}.50=2.10^{x}$ eşitliğini sağlayan $x=?$

6) Obeb'i 6, Okek'i 504 olan iki sayıdan biri 72 ise diğeri nedir?

7) a) $41+42+43+\cdots+100=?$

b) $3+6+9+\cdots+120=?$

c) $12+16+20+\cdots+96=?$

8) a,b,c ardışık tek sayılar olmak üzere $(a-b).(c-b).(a-c)$ çarpımı nedir?

9) $2m-1$ ve $3n+6$ sayıları aralarında asal ve $\frac{2m-1}{3n+6}=\frac{12}{13}$ ise $2m-6n=?$

10) Ardışık iki tek sayıdan küçük olanın 3 katı ile büyük olanın 2 katının toplamı 179 ise bu sayılar nedir?

11) Ardışık iki negatif tek tamsayıdan büyüğünün 3 katından küçüğünün 4 katı çıkarılınca sonuç 23 oluyor. Buna göre bu sayılar nedir?

12) Ardışık 3 çift doğal sayının toplamı 144 ise bu sayılar nedir?

13) Ardışık 10 tek doğal sayının toplamı 340 ise bu sayıların en büyüğü nedir?

14) Ardışık 13 tek doğal sayının toplamı 195 ise bu sayılar büyükten küçüğe sıralandığında 9.sayı nedir?

15) Ardışık 17pozitif tek sayının toplamı 527 ise bu sayıların en büyüğü kaçtır?

16) Ardışık altı negatif tek tamsayının toplamı -96 ise bu sayıların en küçüğü kaçtır?

17) 3 ve 8 ile bölünebilen ardışık üç tamsayının toplamı 792 olduğuna göre bu sayıların en büyüğü kaçtır?

18) n doğal sayı olmak üzere, 1 den n ye kadar olan sayıların toplamı x, 12 den n ye kadar olan sayıların toplamı y dir. $x+y=2384$ olduğuna göre $x=?$

19) $2n-3$ ve $3n-7$ sayılarını ardışık iki tamsayı yapan n değerlerinin toplamı nedir?

20) a) $1-2+3-4+5-6+\cdots-80+81=?$

b) $1-2+3-4+5-6+\cdots+47-48=?$

21) $\frac{3}{7}+\frac{6}{7}+\frac{9}{7}+\ \cdots\ +\frac{3n}{7}$ toplamının $n=41$ için sonucu kaçtır?

22) $\frac{10+15+20+\cdots+105}{12+18+24+\cdots+126}=\frac{100}{\mathrm{x}}$ olduğuna göre $x=$?

23) $A=1.2+2.3+3.4+\cdots\ +n.(n+1)$

$B=7.4+14.6+21.8+\cdots\ +7n.2(n+1)$

olduğuna göre $n=60$ için B değeri A değerinin kaç katıdır?

24) $1.4+2.6+3.8+\cdots\ +10.22$ toplamında her terimin ikinci çarpanı 1 er arttırılırsa toplamın değeri kaç artar?

25) $A=2.5+3.6+4.7+\cdots\ +20.23$ işleminde$A$'nın her bir teriminin ilk çarpanı 2 arttırılırsa A kaç artar?

26) $A=2+6+10+\cdots\ +46+50$

$B=5+9+13+\cdots\ +53+57$

olmak üzere B'nin A cinsinden eşiti nedir?

27) a) $7!-6!+5!-4!=$? b) $\frac{10!}{8!}-\frac{8!}{7!}=$?

28) $\frac{(n+1)!}{n!.(n-1)!}-\frac{1+n^2}{n!}$ işleminin en sade şekli nedir?

29) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}=210$ ise $n=$?

30) $\frac{n!-7n.(n-2)!}{4!.(n-2)!}$ sayısıen küçük asal sayıya eşit olduğuna göre $n=$?

31) $a=3{,}45$ $b=3,\overline{45}$ $c=3{,}4\overline{5}$ a,b,c sayılarının büyükten küçüğe sıralaması nedir?

32) $k=0,\overline{2}$ ve $m=0,\overline{3}$ ise $\frac{1}{k}+\frac{1}{m}=$?

33) $\frac{2}{x+0,\overline{6}}=1{,}8\overline{3}$ ise $x=$?

34) $\frac{a}{1{,}\overline{1}}=\frac{5,\overline{7}}{1,\overline{4}}$ ise a=?

------------------------------------ ◈ ------------------------------------

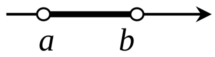
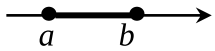
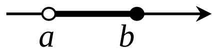
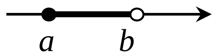
Aralıklar

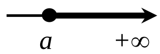
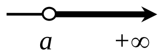
$\mathbb{R}$'ye ait a ve b ($a \leq b$) gibi herhangi iki sayı arasındaki tüm reel sayılardan oluşan, $\mathbb{R}$'nin bir alt kümesine bir "*aralık*" denir. Üç tip aralık vardır.

- Kapalı aralık
- Açık aralık
- Yarı açık aralık

Yarı açık aralıklardan sağdan ve soldan açık (veya kapalı) olmak üzere iki tanedir.

- Kapalı aralıkta sınır değerleri aralığa değildir.
- Açık aralıkta sınır değerleri aralığa dahil değildir.
- Yarı açık aralıkta açık taraftaki değer aralığa dahil değil, kapalı taraftaki değer aralığa dahildir.

SINIRLI ARALIKLAR			
Kümesel Yazılışı	Gösterilişi	Okunuşu	Geometrik Modeli
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a, b)	a, b açık aralığı	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	a, b kapalı aralığı	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	Soldan açık, sağdan kapalı aralık	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	Soldan kapalı, sağdan açık aralık	

SINIRSIZ ARALIKLAR			
Kümesel Yazılışı	Gösterilişi	Okunuşu	Geometrik Modeli
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	Soldan a ile sınırlı, sağdan sınırsız kapalı aralık	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$	Soldan a ile sınırlı, sağdan sınırsız açık aralık	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	Soldan sınırsız, sağdan a ile sınırlı açık aralık	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	Soldan sınırsız, sağdan a ile sınırlı kapalı aralık	

ÖZDEŞLİKLER, BİNOM AÇILIMI, ÇARPANLARA AYIRMA

Özdeşlikler

İki cebirsel ifade içerdikleri değişkenlerin her değeri için aynı sayısal değeri alıyorsa bu iki İfadeye *"özdeştir"* denir. Örneğin $x^2 - 1$ ile $(x - 1)(x + 1)$ ifadesini ele alalım :

$$(x - 1)(x + 1) = x.x + x.1 - 1.x - 1.1 = x^2 - 1$$

buluruz. Dolayısıyla her *x* reel sayısı için

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

olur. Bu nedenle bu iki ifade özdeştir diyoruz. Bir problemde bir ifade yerine onun özdeşi kullanılabilir. İki ifadenin özdeşliği ≡ işareti ile ifade edilirse de genellikle bunun yerine = işareti tercih edilmektedir.

Başlıca özdeşlikler:

$a^2 - b^2 = (a-b).(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b).(a^2+ab+b^2)$
$a^3 + b^3 = (a+b).(a^2-ab+b^2)$

$a^4 - b^4 = (a-b).(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

$a^5 - b^5 = (a-b).(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$
$a^5 + b^5 = (a+b).(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$
$a^n - b^n = (a-b).(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ ...\ +b^{n-1})$
$a^n + b^n = (a+b).(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ ...\ +b^{n-1}) \rightarrow$ *n* tek

Not: *n* çift sayı olduğu zaman a^n+b^n açılımının **olmadığına** dikkat ediniz.

Yukarıdaki özdeşliklere ek olarak üç terimin toplamının karesi için şu özdeşlik vardır:

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

Burada *a,b,c* sayılarının işaretine bağlı olarak bu özdeşlikte işaret değişiklikleri olur. Örneğin;

$(a-b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(-ab+ac-bc)$

ÖRNEK1: Aşağıdaki özdeşlik örneklerini inceleyiniz.

a) $x^2 - 9 = (x - 3) . (x + 3)$

b) $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2) . (x^2 + 2x + 4)$

c) $4a^2 - 2 = \left(2a + \sqrt{2}\right).(2a - \sqrt{2})$

d) $64a^3 - (2a\text{-}1)^3 = (4a)^3 - (2a\text{-}1)^3$

$= [4a - (2a\text{-}1)] . [(4a)^2 + 4a.(2a\text{-}1) + (2a\text{-}1)^2]$

$= (4a - 2a+1) . (16a^2 + 8a^2 - 4a + 4a^2 - 4a + 1)$

$= (2a-1).(28a^2 - 8a + 1)$

e) $(2x\text{-}y)^3 + y^3 = [(2x-y) + y] . [(2x-y)^2 - (2x-y).y + y^2]$

$= (2x\text{-}y+y) . (4x^2 - 4xy + y^2 - 2xy + y^2 + y^2)$

$= 2x .(4x^2 - 6xy + 3y^2)$

Binom Açılımı

Binom açılımında Pascal Üçgeni denilen yandaki üçgenden yararlanılır. Kaçıncı dereceden binom açılımı yapılıyorsa, Pascal üçgeninin ilgili satırındaki sayılar, açılımın katsayılarını oluşturur.

Pascal Üçgeni

n=0 için → 1

n=1 için → 1 1

n=2 için → 1 2 1

n=3 için → 1 3 3 1

n=4 için → 1 4 6 4 1

n=5 için → 1 5 10 10 5 1

⋮ ⋮

$(a \mp b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a + b$
$(a-b)^1 = a - b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

⋮ ⋮

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ .\ .\ .\ + b^n$$

Binom açılımının yukarıdaki genelleştirilmiş formülü şu şekilde de yazılabilir:

$$(a+b)^n = \binom{n}{o} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3}b^3 + \ .\ .\ .\ + \binom{n}{n} b^n$$

Burada

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\ \ k!} \qquad\qquad (\ n, k \in \mathrm{Z}^+\ )$$

şeklindedir. Örneğin;

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!\ \ 3!} = \frac{7!}{4!\ \ 3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!\ \ 3.2.1} = 35$$

Not: 0!=1 olduğunu, dolayısı ile $\binom{n}{0} = 1$ olduğunu unutmayınız.

ÖRNEK 2: Aşağıdaki binom açılımı örneklerini inceleyiniz:

a) $(2x+5)^2 = \ 4x^2 + 20x + 25$

b) $(3x-4)^2 = \ 9x^2 - 24x + 16$

c) $(3-5a)^3 = \ 3^3 - 3.3^2.(5a) + 3.3^1.(5a)^2 - (5a)^3$

$\qquad = 27 - 135a + 225a^2 - 125a^3$

d) $(x-2)^4 = x^4 - 4.x^3.2 + 6.x^2.2^2 - 4.x.2^3 + 2^4$

$\qquad = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

e) $\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{5}^2 - 2.\sqrt{5}.\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 7 - 2\sqrt{10}$

f) $(x+2)^6 = x^6.2^0 + 6.x^5.2^1 + 15.x^4.2^2 + 20.x^3.2^3 + 15.x^2.2^4 + 6.x^1.2^5 + x^0.2^6$

$\qquad = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$

g) $(x+2y)^4 = x^4(2y)^0 + 4x^3(2y)^1 + 6x^2(2y)^2 + 4x^1(2y)^3 + x^0(2y)^4$

$\qquad = x^4 + 4x^3.2y + 6x^2 4y^2 + 4x.8y^3 + 16y^4$

$\qquad = x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$

ÖRNEK 3: $a-b=3$ ve $a.b=6$ ise $a^2+b^2=?$

Çözüm:

$(a-b)^2= a^2- 2ab + b^2$

$(a-b)^2+ 2ab = a^2+ b^2$

$3^2+ 2.6 = a^2+ b^2$

$a^2+ b^2= 21$

ÖRNEK 4: $a+b=10$ ve $a.b=21$ ise $a^3+b^3=?$

Çözüm:

$(a+b)^3= a^3+ 3a^2b + 3ab^2+ b^3$

$(a+b)^3- 3a^2b - 3ab^2= a^3+ b^3$

$(a+b)^3- 3ab(a+b) = a^3+ b^3$

$10^3- 3.21.10 = a^3 + b^3$

$1000 - 630 = a^3+ b^3$

$a^3+b^3=370$

ÖRNEK5: $(x+y)^7$ binom açılımını yapınız.

Çözüm:

$$(x+y)^7 = \binom{7}{o}x^7 + \binom{7}{1}x^6y + \binom{7}{2}x^5y^2 + \binom{7}{3}x^4y^3 + \binom{7}{4}x^3y^4 + \binom{7}{5}x^2y^5 + \binom{7}{6}x^1y^6 + \binom{7}{7}y^7$$

$$= x^7 + \frac{7!}{1!\ \ 6!}x^6y + \frac{7!}{2!\ \ 5!}x^5y^2 + \frac{7!}{3!\ \ 4!}x^4y^3 + \frac{7!}{4!\ \ 3!}x^3y^4 + \frac{7!}{5!\ \ 2!}x^2y^5$$

$$+ \frac{7!}{6!\ \ 1!}xy^6 + \frac{7!}{7!\ \ 0!}y^7$$

$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$$

ÖRNEK 6: 8.dereceden binom açılımında 4.terimin katsayısı nedir?

Çözüm:

$$\binom{8}{3} = \frac{8}{(8-3)!\,.3!} = \frac{8!}{5!\,.3!} = \frac{8.7.6.5!}{5!\,.3.2.1} = 56$$

ÖRNEK 7: $(x+y)^{11}$ binom açılımında x^4y^7 teriminin katsayısı kaçtır?

Çözüm:

Binom açılımında $x^{n-k}y^k$ teriminin katsayısı $\binom{n}{k}$ dır. Buna göre x^4y^7 teriminin katsayısı:

$$\binom{11}{7} = \frac{11!}{(11-7)!\ \ 7!} = \frac{11!}{4!\ \ 7!} = \frac{11.10.9.8.7!}{4.3.2.1.7!} = 330$$

ÖRNEK 8: $(x+3)^6$ binom açılımında x^4 teriminin katsayısı kaçtır?

Çözüm:

n= 6 dır. $x^{n-k}y^k$ teriminin katsayısı $\binom{n}{k}$ olduğuna göre bu soruda 6-k = 4 $\Rightarrow$ k=2 dir.

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!\ \ 2!} = \frac{6!}{4!\ \ 2!} = \frac{6.5.4!}{4!.2.1} = 15$$

Aradığımız cevap 15 değildir. 15, Pascal üçgeninden gelen katsayıdır. İkinci terim 3 olduğuna göre bu sayıdan kaynaklanan bir çarpım da olacaktır.

$$\binom{n}{k} x^{n-k}y^k = \binom{6}{2} x^4 3^2 = 15.x^4.9 = 135x^4$$

Cevap: 135

Not : Katsayı sorularında her zaman Örnek 7 ve 8'de olduğu gibi kaçıncı terimin istendiği verilmeyebilir. Örneklerden anlaşılacağı gibi bu durumda $\boxed{\binom{n}{k} x^{n-k}y^k}$ ifadesi kullanılır.

Bir diğer önemli nokta ise sonucun işaretine karar vermektir:

$(a+b)^n$ açılımında tüm katsayılar (+) dır.

$(a-b)^n$ açılımında tüm tek numaralı katsayılar (+) , çift numaralı katsayılar $(-)$ dir.

Örneğin $(2x-5)^{10}$ açılımında 6.terimin katsayısı $(-)$ işaretlidir.

Çarpanlara Ayırma

Bazı problemlerde verilen ifadeyi çarpanlara ayırmak, bu problemi daha kolay ve kısa yoldan çözmemize yardımcı olur. Çarpanlara ayırmak için genellikle **ortak çarpan parantezine alma, gruplandırma** veya **özdeşliklerden yararlanma** yollarına başvurulur.Ya da bazı yüksek dereceli polinomlar söz konusu ise **polinom bölümü** veya **deneme** yolu ile çarpanlara ayırmak mümkündür.

Aşağıdaki 9,10,11,12,13. örnekleri inceleyiniz.

ÖRNEK 9: $(x-3)^2+4(x-3)$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm: $(x-3)^2+4(x-3)=(x-3)(x-3)+4(x-3)$

$=(x-3)(x-3+4)$

$=(x-3)(x+1)$

ÖRNEK 10: $x(x^2-y)+y(y-x^2)-y+x^2$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm: $x(x^2-y)+y(y-x^2)-y+x^2= x(x^2-y)-y(x^2-y)-(y-x^2)$

$$= x(x^2-y)-y(x^2-y)+(x^2-y)$$
$$= (x^2-y)(x-y+1)$$

ÖRNEK 11: $a^2b^2+x^2y^2+a^2x^2+b^2y^2$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm: $a^2b^2+x^2y^2+a^2x^2+b^2y^2=a^2(b^2+x^2)+y^2(x^2+b^2)$

$$=(b^2+x^2)(a^2+y^2)$$

ÖRNEK 12: $x^2-y^2-8x+16$ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm: $x^2-y^2-8x+16=x^2-8x+16-y^2$

$$=(x-4)^2-y^2$$
$$=(x-4-y)(x-4+y)$$

ÖRNEK 13: x^2-4y^2+4y-1 ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm: $x^2-4y^2+4y-1=x^2-(4y^2-4y+1)$

$$=x^2-(2y-1)^2$$
$$=(x-2y+1)(x+2y-1)$$

ax^2+bx+c şeklindeki üç terimli ifadelerin çarpanlara ayrılması:

$$ax^2+bx+c=\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Ancak bu çok da pratik bir yol değildir. Verilen ifadedeki katsayılar uygunsa aşağıdaki pratik yol kullanılabilir.

- a=1 ise, çarpımları c'yi, toplamları b'yi veren p ve q şeklinde iki sayı varsa

$$ax^2+bx+c=(x+p)(x+q)$$

şeklinde çarpanlarına ayrılabilir.

- a≠1 ise ax^2+bx+c ifadesini çarpanlarına ayırmak için

$$ax^2+bx+c=(mx+p)(nx+q)$$

eşitliğinden$a=m.n,\;\; b=mq+np,\;\; c=p.q$ olur. Şu şekilde de açıklanabilir:

$$\begin{array}{ll} ax^2+bx+c & \\ mx \qquad\quad p & \\ nx \qquad\quad q & \\ \hline mxq+nxp=bx & \Rightarrow \quad ax^2+bx+c=(mx+p)(nx+q) \end{array}$$

ÖRNEK 14: $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$

-2 -1

ÖRNEK15: $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$

-4 3

ÖRNEK 16: $6x^2-7x+2$ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm:

$$\begin{array}{ll} 6x^2-7x+2 & \\ 2x \qquad\quad -1 & \\ 3x \qquad\quad -2 & \\ \hline -4x-3x=-7x & \Rightarrow 6x^2-7x+2=(2x-1)(3x-2) \end{array}$$

ÖRNEK17: $3x^2+4x+1$ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm:

$$\begin{array}{ll} 3x^2+4x+1 & \\ 3x \qquad\quad 1 & \\ x \qquad\quad 1 & \\ \hline 3x+x=4x & \Rightarrow 3x^2+4x+1=(3x+1)(x+1) \end{array}$$

ÖRNEK 18: $12x^2+5x-2$ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm:

$$\begin{array}{ll} 12x^2+5x-2 & \\ 3x \qquad\quad 2 & \\ 4x \qquad\quad -1 & \\ \hline -3x+8x=5x & \Rightarrow 12x^2+5x-2=(3x+2)(4x-1) \end{array}$$

ÖRNEK 19: $\frac{2x^2-3x+1}{x^2-3x+2}$ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm: $\frac{2x^2-3x+1}{x^2-3x+2}=\frac{(2x-1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}=\frac{2x-1}{x-2}$

ÖRNEK 20: $\frac{x^2-m}{x^2-7x+10}$ ifadesi sadeleştiğine göre m'nin alacağı değerler toplamı kaçtır?

Çözüm: $\frac{x^2-m}{x^2-7x+10} = \frac{x^2-m}{(x-2)(x-5)}$

Sadeleşebilmesi için $x^2 - m = (x-2)(x+2)$ veya $x^2 - m = (x-5)(x+5)$ olmalıdır. O halde $m = 4$ veya $m = 25$ olmalıdır. Toplamları $4+25=29$

SORULAR

1) Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $x^2 - 4x - 12$

b) $t^2 + 2t - 3$

c) $y^2 - 7y + 12$

d) $a^2 - 8a + 15$

e) $t + 12t + 35$

f) $2x^2 - 12x - 14$

g) $12b^2 - 29b + 15$

h) $3x^2 + 17x - 56$

i) $20a^2 + 23a + 6$

2) $\frac{x^2-xy}{y^2-x^2} : \frac{x^2}{xy-y^2}$ ifadesini sadeleştiriniz.

3) $\frac{3x+2}{x^2-1} \cdot \frac{3x^2+x-2}{9x^2-4}$ ifadesini sadeleştiriniz.

4) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4} : \frac{x^2-6x+8}{x^2-4x+4}$ ifadesini sadeleştiriniz.

5) $\frac{(2x^2-3x+1)(x^2-9)}{x^2-4x+3}$ ifadesini sadeleştiriniz.

6) $\frac{1}{x^2-xy} - \frac{2}{x^2-y^2}$ ifadesini sadeleştiriniz.

7) $\frac{x^2-xy-x+y}{x^2-xy+x-y} : \frac{xy+x-y-1}{xy+x}$ ifadesinin eşiti nedir?

8) $(x-y)^7 + (y-x)^7 + \frac{xy}{(x+y)^2-(x-y)^2}$ ifadesinin eşiti nedir?

9) $\left(\frac{a+b}{1-a^2b^2} - \frac{a}{1+ab}\right) : \left(\frac{1}{1-ab} + \frac{a^2-ab}{1-a^2b^2}\right)$ ifadesinin en sade şekli nedir?

10) $x^2 - y^2 = 9$, $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 4$ ise $x =?$

11) $3x^2y + y^3 = 9$, $3xy^2 + x^3 = 36$ ise $x - y =?$

12) $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$ polinomunu çarpanlarına ayırınız.

13) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-m}$ ifadesi sadeleştiğine göre m'nin alacağı değerler toplamı kaçtır?

14) $x-\frac{1}{x}=3$ ise $x^2-\frac{1}{x^2}=?$

15) $x-\frac{2}{x}=3$ ise $x^3-\frac{8}{x^3}=?$

16) $\frac{a^3-1}{a^3+a^2+a}$ ifadesinin en sade şekli nedir?

17) $127^2-122^2=5p$ ise $p=?$

18) $\frac{a^6-b^6}{a^3-b^3} : \frac{a^2-ab+b^2}{a}$ ifadesinin eşiti nedir?

19) $2x+y=6 \quad 4x^2+y^2=72$ ise $x.y=?$

20) $ab-ac-bc=11$ ve $a+b-c=9$ ise $a^2+b^2+c^2=?$

21) x ve y birer reel sayı olmak üzere

$3xy^2+x^3=9$
$3x^2y+y^3=18$

olduğuna göre $x+y=?$

22) $a+b=1$ ve $a^3+b^3=\frac{7}{16}$ olduğuna göre $a.b=?$

23) Kareleri farkı 6 olan a ve b sayılarının her birinden 2 çıkarılırsa, yeni sayıların kareleri farkı 18 olmaktadır. Buna göre $a+b=?$

24) $a-b=b-c=5$ olduğuna göre $a^2+c^2-2b^2$ işleminin sonucu kaçtır?

------------------------------------ ◈ ------------------------------------

TABAN ARİTMETİĞİ

10'luk sistemde bir x sayısı $x = (\dots\ a_3a_2a_1a_0)$ olsun. Burada basamaklar

$a_0 \rightarrow$ birler basamağı

$a_1 \rightarrow$ onlar basamağı

$a_2 \rightarrow$ yüzler basamağı

$a_3 \rightarrow$ binler basamağı

$\vdots$

şeklindedir. Taban 10 olduğu için 10'un katları ile isimlendirilir. Taban 10 yerine başka bir sayı olursa bu basamak isimleri o sayının kuvvetlerine göre isim alır. Örneğin $(\dots\ a_3a_2a_1a_0)_4$ sayısında basamak isimleri a_0 dan başlayarak sırasıyla: birler basamağı, dörtler basamağı, onaltılar basamağı, altmışdörtler basamağı …şeklinde devam eder. Şimdi yukarıdaki x sayısına dönelim. Bu sayının açılımı:

$$x = (\dots\ a_3a_2a_1a_0)_{10} = a_0.10^0 + a_1.10^1 + a_2.10^2 + a_3.10^3 + \dots$$

şeklindedir.Yani taban k gibi bir sayı ise 10 yerine k'nın kuvvetlerine göre açılım yapılır.

- Herhangi bir tabandaki sayı, tabandan küçük rakamlarla ifade edilir.Örneğin;

n tabanındaki bir sayı	$0,1,2, \dots n$-1 sayıları ile ifade edilir.	
10 tabanındaki bir sayı	0,1,2, 3,4,5,6,7,8,9	″ ″
4 tabanındaki bir sayı	0,1,2, 3	″ ″
2 tabanındaki bir sayı	0,1	″ ″
16 tabanındaki bir sayı	0,1,2, 3,4,5,6,7,8,9, A, B, C, D, E, F	ile ifade edilir.

Burada A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15 dir. Taban büyüdükçe harflendirme devam eder.

1) n tabanından 10 tabanına geçiş:

a. n tabanındaki bir tam sayıyı 10 tabanında ifade etmek için n'in kuvvetlerine göre açılım yapılır.

$$(\dots\ dcba)_n = a.n^0 + b.n^1 + c.n^2 + d.n^3 + \dots$$

b. Eğer sayı kesirli ise virgülden sonraki kısın n'in negatif kuvvetlerine göre açılır. Örneğin;

$$(abc,def)_n = a.n^2 + b.n^1 + c.n^0 + \frac{d}{n} + \frac{e}{n^2} + \frac{f}{n^3}$$

2) 10 tabanından n tabanına geçiş:

a. 10 tabanındaki bir tam sayıyı n tabanına dönüştürmek için sayı, sürekli olarak n'e bölünür(Bölünmeyene kadar devam edilir). Sonuçta en son bölümden başlayarak kalanlar geriye doğru sırayla yazılır.

b. Eğer sayı kesirliyse, tam kısmı normal şekilde bölünerek yapılır. Kesirli kısım taban ile çarpılır. Elde edilen sayının tam kısmı yazılır. Kesirli kısmı tekrar taban ile çarpılır. Bu şekilde işleme devam edilir.

3) n tabanından k tabanına geçiş;

n tabanındaki bir sayıyı k tabanında yazabilmek için, önce n'in kuvvetlerine göre açılarak 10 tabanına çevrilir. Elde edilen sayı yukarıdaki 2.kurala göre k tabanına çevrilir.

ÖRNEK 1: $(42)_{10} = (?)_5$

```
 42 | 5
-40 | 8 | 5
  2  -5 | 1
      3
```

Cevap : $(42)_{10} = (132)_5$

ÖRNEK 2: $(5362)_{10} = (?)_7$

```
 5362 | 7
- 49  | 766 | 7
   46  -7    | 109 | 7
 - 42   066 - 7    | 15 | 7
    42 - 63    39 - 14 | 2
  - 42     3  - 35   1
     0           4
```

Cevap : $(5362)_{10} = (21430)_7$

ÖRNEK 3: $(10232)_4 = (?)_{10}$

$$\underset{4^4\,4^3\,4^2\,4^1\,4^0}{(1\ 0\ 2\ 3\ 2)_{10}} = 2.4^0 + 3.4^1 + 2.4^2 + 0.4^3 + 1.4^4$$

$$= 2 + 12 + 32 + 0 + 256 = 302$$
$$= 302$$

Cevap : $(10232)_4 = (302)_{10}$

ÖRNEK 4: $(124)_{10} = (?)_5$

$$\begin{array}{r|l} 124 & 5 \\ \cline{2-2} -10 & 24 \\ \hline 24 & \\ -20 & \\ \hline 4 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 24 & 5 \\ \cline{2-2} -20 & 4 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Cevap : $(124)_{10} = (444)_5$

ÖRNEK 5: $(483)_{10} = (?)_3$

$$\begin{array}{r|l} 483 & 3 \\ \cline{2-2} -3 & 161 \\ \hline 18 & \\ -18 & \\ \hline 03 & \\ -3 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 161 & 3 \\ \cline{2-2} -15 & 53 \\ \hline 11 & \\ -9 & \\ \hline 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 53 & 3 \\ \cline{2-2} -3 & 17 \\ \hline 23 & \\ -21 & \\ \hline 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \cline{2-2} -15 & 5 \\ \hline 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \cline{2-2} -3 & 1 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Cevap : $(483)_{10} = (122220)_3$

ÖRNEK 6: $(ABC)_{13} = (?)_{10}$

$(ABC)_{13} = C.13^0 + B.13^1 + A.13^2$

$(ABC)_{13} = 12.13^0 + 11.13^1 + 10.13^2$

$(ABC)_{13} = 12 + 143 + 1690$

$(ABC)_{13} = 1845$

Cevap : $(ABC)_{13} = (1845)_{10}$

ÖRNEK 7: $(2304)_5 = (?)_{10}$

$(2304)_5 = 4.5^0 + 0.5^1 + 3.5^2 + 2.5^3$

$(2304)_5 = 4.1 + 0.5 + 3.25 + 2.125$

$(2304)_5 = 4 + 0 + 75 + 250$

$(2304)_5 = 329$

Cevap : $(2304)_5 = (329)_{10}$

ÖRNEK 8: $(145)_6 = (?)_{10}$

$= 5.6^0 + 4.6^1 + 1.6^2$

$= 5 + 24 + 36$

$= 65$

Cevap : $(145)_6 = (65)_{10}$

ÖRNEK 9: $(101101)_2 = (?)_5$

$$(101101)_2 = 1.2^0 + 0.2^1 + 1.2^2 + 1.2^3 + 0.2^4 \quad + 1.2^5$$

$$(101101)_2 = 1 + 4 + 8 + 32 = 45$$

$$(101101)_2 = (45)_{10}$$

$$\begin{array}{r|l} 45 & 5 \\ \underline{-\ 45} & 9 \;|\; 5 \\ 0 & \underline{-\ 5} \;\; 1 \\ & \;\; 4 \end{array}$$

Cevap : $(101101)_2 = (140)_5$

ÖRNEK 10: $(34{,}12)_5 \ = (?)_4$

$$(34{,}12)_5 \ = (34{,}12)_5 = 3.5^1 + 4.5^0 + \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} = 19 + \frac{7}{25} = 19{,}28$$

Şimdi 19,28 sayısını 4 tabanına çevirelim:

$$\begin{array}{r|l} 19 & 4 \\ \underline{-\ 16} & 4 \;|\; 4 \\ 3 & \underline{-\ 4} \;\; 1 \\ & \;\; 0 \end{array}$$

$0{,}28 \bullet 4 = 1{,}12$
$0{,}12 \bullet 4 = 0{,}48$
$0{,}48 \bullet 4 = 1{,}92$
$0{,}92 \bullet 4 = 3{,}68$
$0{,}68 \bullet 4 = 2{,}72$
$0{,}72 \bullet 4 = 2{,}88$
$0{,}88 \bullet 4 = 3{,}52$
$\vdots$

Cevap: $(34{,}12)_5 \ = (103{,}10132223)_4$

ÖRNEK 11: $(1a3)_5 \ = (10a)_6$ *ise a kaçtır*?

$$3.5^0 + a.5^1 + 1.5^2 = a.6^0 + 0.6^1 + 1.6^2$$

$$3 + 5a + 25 = a + 36$$
$$4a = 8$$
$$a = 2$$

ÖRNEK 12: 6 tabanına göre rakamları farklı dört basamaklı en küçük sayı ile $n$tabanına göre rakamları farklı en büyük iki basamaklı sayının farkı 208 olduğuna göre n kaçtır?

$(\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet)_6$
216 36 6 1

en küçük $\longrightarrow$ $(1023)_6 \ = 3.6^0 + 2.6^1 + 0.6^2 + 1.6^3 = 231$

$(\bullet\ \bullet)_n$
n-1 *n*-2

en büyük $\longrightarrow$ $\big((n-1).(n-2)\big)_n = \quad (n-1).n^1 + (n-2).n^0$

$$= n^2 - 2$$

her iki sayıyı da 10 tabanında yazmış olduk. Şimdi bu iki sayının farkını alalım.

$$231-(n^2-2)=208 \qquad \Rightarrow\ 231-n^2+2=208$$
$$\Rightarrow\ 25=n^2$$
$$\Rightarrow\ \mathrm{n}=5$$

ÖRNEK 13: $(2103)_4=(?)_3$

$$(2103)_4=3.4^0+0.4^1+1.4^2\quad+2.4^3=3+16+128$$

$$(2103)_4=\quad 147$$

Şimdi 147 sayısını 3 tabanına çevirelim:

$$\begin{array}{r|l} 147 & 3 \\ \underline{-12} & 49 \\ 27 & \\ \underline{-27} & \\ 0 & \end{array}\quad \begin{array}{r|l} 49 & 3 \\ \underline{-3} & 16 \\ 19 & \\ \underline{-18} & \\ 1 & \end{array}\quad \begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \underline{-15} & 5 \\ 1 & \end{array}\quad \begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \underline{-3} & 1 \\ 2 & \end{array}$$

Cevap: $(2103)_4=(12110)_3$

ÖRNEK 14: $(431)_n.(4)_n=(2354)_n$ *ise n kaçtır?*

$$(4n^2+3n+1)\ .4=2n^3+3n^2+5n+4$$
$$16n^2+12n+4=2n^3+3n^2+5n+4$$
$$16n^2+12n+4-2n^3-3n^2-5n-4=0$$
$$-2n^3+13n^2+7n=0$$
$$-2n^2+13n\quad+7=0$$
$$2n^2-13n\quad-7=0$$

$$\left.\begin{array}{lr} 2n & 1 \\ n & -7 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{-14n+n=-13n} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} (2n+1).(n-7)=0 \\ n=-\frac{1}{2} \ \vee\ n=7 \\ \times \qquad\qquad \checkmark \end{array}$$

(taban negatif olamaz)

Cevap: $n=7$

ÖRNEK 15: $(2\,5\,m\,0)_6=(6\,4\,2\,)_{10}$ ise $m=?$

$$(2\ 5\ m\ 0)_6$$
$$\downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow$$
$$6^3\ \ 6^2\ \ 6^1\ \ 6^0$$

$$2.6^3+5.6^2+m.6^1+0.6^0=642$$

$$432+180+6m+0=642$$

$$6m=30$$

$$m=5$$

Cevap: m= 5

SORULAR

1) Aşağıdaki taban dönüşümlerini yapınız.

a) $(2076)_8 = (?)_{10}$

b) $(430)_5 = (?)_{10}$

c) $(1010111)_2 = (?)_{10}$

d) $(2AB)_{16} = (?)_{10}$

e) $(2170)_{10} = (?)_2$

f) $(520)_6 = (?)_7$

g) $(1443)_8 = (?)_{14}$

2) Aşağıdaki taban dönüşümlerini yapınız.

a) $(332{,}123)_4 = (?)_{10}$

b) $(423{,}12)_5 = (?)_{10}$

c) $(13{,}25)_{10} = (?)_2$

d) $(419{,}12109375)_{10} = (?)_{16}$

e) $(451{,}203125)_{10} = (?)_8$

f) $(21{,}102)_3 = (?)_5$

g) $(1101{,}11)_2 = (?)_3$

h) $(57{,}42)_8 = (?)_2$

i) $(1223{,}22)_4 = (?)_6$

3) $(241)_m = (97)_{10}$ *ise m kaçtır?*

4) $(203)_a = (110101)_2$ *ise a kaçtır?*

5) $(13)_a.(15)_a = (231)_a$ *ise* a kaçtır?

6) $(321)_m.(3)_m = (2013)_m$ *ise m kaçtır?*

7) $(431)_n.(4)_n = (2354)_n$ *ise n kaçtır?*

8) $(124)_5 + (103)_5 = (abc)_7$ *ise* $a + b + c$ *kaçtır?*

9) $a \neq b$ olmak üzere $(30a2)_4 = (31b)_8$ olduğuna göre $a + b$=?

10) $(12x)_8 + (34)_x$ toplamının en küçük değerinin 10 tabanındaki eşiti nedir?

11) 4 tabanında rakamları farklı üç basamaklı en büyük sayı ile 5 tabanında rakamları farklı üç basamaklı en küçük sayının toplamı 10 tabanında nedir?

12) 3 tabanında dört basamaklı en büyük sayıdan, 7 tabanında rakamları farklı iki basamaklı en büyük sayı çıkartılırsa, sonucun 9 tabanındaki karşılığı ne olur?

------------------------------------ ◈ ------------------------------------

DENKLEMLER, EŞİTSİZLİKLER, MUTLAK DEĞER

Öncelikle bazı matematiksel ifadelerin isimlendirilmelerine dair bir ön bilgi verelim. Denklem, eşitsizlik, fonksiyon veya polinom gibi ifadelerin isimlendirilmeleri bu ifadelerin içerdikleri **değişken sayısına** ve **en yüksek dereceli terime** bağlı olarak yapılır. Bu isimlendirmelerin bazı örnekleri aşağıda verilmiştir.

$2x + y = 5$	→ 1.dereceden 2 bilinmeyenli denklem
$f(x) = x^2 + 2x - 6$	→ 2.dereceden 1 bilinmeyenli fonksiyon
$3a + 4b - c > 10$	→ 1.dereceden 3 bilinmeyenli eşitsizlik
$P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x + 2$	→ 4.dereceden polinom
$f(x,y) = 5x^3 + 2xy - 4y^2 + 8y$	→ 3.dereceden 2 bilinmeyenli fonksiyon
$a^2 + b^2 = 4$	→ 2.dereceden 2 bilinmeyenli denklem
$f(x,y,z) = 3xy + 4y^2 - yz + z^2 - xyz$	→ 2.dereceden 3 bilinmeyenli fonksiyon
$t - \frac{t}{2} + 3 \geq 2t + 7$	→ 1. dereceden 1 bilinmeyenli eşitsizlik

Zaman zaman denklem ve fonksiyonun karıştırıldığını görüyoruz. Denklem, bilinmeyenlerin bazı özel değerleri için sağlanır. Ancak fonksiyonda bilinmeyenlere tanım kümesinden keyfi değerler verilebilir.

Hatırlanması gereken diğer bir nokta ise denklem ve eşitsizliklerin çözümü ile ilgilidir. Denklemin çözümü genellikle bir ya da daha fazla değerden oluşan bir kümedir. Eşitsizliklerin çözümünde ise genellikle bir aralık şeklinde bulunur.

Denklem → Çözüm Kümesi

Eşitsizlik → Çözüm Aralığı

Fonksiyon → Grafik

DENKLEMLER

Öncelikle bir bilinmeyenli denklemleri ele alacağız.

- *1.dereceden 1 bilinmeyenli denklem*: $ax + b = 0$ $\quad a, b \in R$ ve $a \neq 0$
- *2.dereceden 1 bilinmeyenli denklem*:$ax^2 + bx + c = 0$ $\quad a, b, c \in R$ ve $a \neq 0$
- 3.*dereceden 1 bilinmeyenli denklem*: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $\quad a, b, c, d \in R$ ve $a \neq 0$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

Bu şekilde devam edilerek daha yüksek dereceden denklemlerin genel formu yazılabilir. Şimdi sırasıyla bu denklemlerin çözümünün nasıl yapıldığını inceleyelim.

1) Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin çözümü:

Bu tip denklemlerde bilinmeyeni yalnız bırakmak yeterlidir.

$$ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$$

şeklindedir. Çözüm Kümesi $= \left\{-\frac{b}{a}\right\}$ şeklinde yazılır. Soru her zaman bu şekilde verilmeyebilir. Daha karmaşık ifadelerde de gerekli işlemler (ortak parantez, payda eşitleme v.s.) yapılarak bilinmeyen yalnız bırakılır.

ÖRNEK 1: $8x - 7 = 3x + 23$ ise $x =?$

$$8x - 3x = 23 + 7$$

$$5x = 30 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

ÖRNEK 2: $\frac{2}{x-3} = \frac{3}{x-1}$ ise $x =?$

$$3(x - 3) = 2(x - 1)$$

$$3x - 9 = 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad x = 7$$

ÖRNEK 3: $\frac{2x-3}{6} - \frac{x-1}{3} = \frac{3x-1}{4}$ ise $x =?$

$$\frac{4(2x-3)}{24} - \frac{8(x-1)}{24} = \frac{6(3x-1)}{24}$$

$$8x - 12 - 8x + 8 = 18x - 6$$

$$2 = 18x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{9}$$

2) İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin çözümü:

Bu tip denklemleri çözmek için ya *diskriminant* değerinden yararlanılır ya da katsayılar uygunsa pratik yöntemle çarpanlarına ayrılır. Diskriminant değeri Δ (delta) sembolü ile gösterilir.

a) Diskriminant (Δ) kullanarak çözüm: Önce Δ ile gösterilen diskriminant değeri hesaplanır.

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Δ değerine bağlı olarak üç ihtimal sözkonusudur:

- $\Delta > 0 \;\Rightarrow$ İki farklı reel kök vardır

$$\boxed{x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$\text{Çözüm Kümesi} = \left\{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

- $\Delta = 0 \;\Rightarrow$ Kökler çakışıktır.

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

$$\text{Çözüm Kümesi} = \left\{x_{1,2} = \frac{-b}{2a}\right\}$$

- $\Delta < 0 \;\Rightarrow$ Reel kök yoktur.

NOT: Yukarıdaki üçüncü duruma dikkat ediniz, denklemin “kökü yoktur” değil “reel kökü yoktur” denmiştir. Yani aslında denklemin kompleks sayılardan oluşan eşlenik kökleri mevcuttur. Ancak bizden reel kökler isteniyorsa bu durumda çözüm kümesini, boş küme olarak almalıyız.

b) Çarpanlara ayırarak çözüm: İlk ve son katsayılar (buradaki gösterime göre a ve c sayıları) çarpanlarına ayrılabiliyorsa bu yol kullanılabilir.

$a = d.e$ ve $c = f.g$ olmak üzere

$$\left.\begin{array}{l} ax^2 + bx + c = 0 \\ dx \qquad\quad f \\ ex \qquad\quad g \\ \hline dgx - efx = bx \end{array}\right\} \Rightarrow (dx+f).(ex+g) = 0$$

$$dx + f = 0 \quad \vee \quad ex + g = 0$$

$$x = -\frac{f}{d} \quad \vee \quad x = -\frac{g}{e}$$

$$\text{Çözüm Kümesi} = \left\{-\frac{f}{d}, -\frac{g}{e}\right\}$$

3) Yüksek dereceli bir bilinmeyenli denklemlerin çözümü:

Bu tip denklemlerin çözümü için kesin bir formül olmamakla beraber farklı yollar kullanılabilir (3. ve 4. dereceden denklemler için formüller vardır ancak çok da kullanışlı değildir). Daha önce çarpanlara ayırma konusunda anlatıldığı gibi verilen denklem çeşitli yollarla çarpanlarına ayrılarak çözülebileceği gibi, dönüşümlerle denklemin derecesinin indirgenmesi de bu yollardan bazılarıdır.

Not: Bir denklemin kök sayısı en fazla denklemin derecesi kadardır.

ÖRNEK 4: $x^2 + 5x - 14 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Bu denklemde $a = 1,\ b = 5,\ c = -14$ tür.

<u>1.yol</u>

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 5^2 - 4.1.(-14)$

$\Delta = 25 + 56$

$\Delta = 81$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+\sqrt{81}}{2.1} = \frac{-5+9}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{81}}{2.1} = \frac{-5-9}{2} = 2$

Çözüm Kümesi = $\{2, -7\}$

<u>2.yol</u>

$x^2 + 5x - 14 = 0$

-2 7

$(x-2).(x+7) = 0$

$x - 2 = 0 \quad \vee \quad x + 7 = 0$

$x = 2 \quad \vee \quad x = -7$

Çözüm Kümesi = $\{2, -7\}$

ÖRNEK5: $2x^2 - 7x + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Bu denklemde $a = 2,\ b = -7,\ c = 3$ tür.

<u>1.yol</u>

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-7)^2 - 4.2.3$

$\Delta = 49 - 24$

$\Delta = 25 - 6x - x = -7x$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7)+\sqrt{25}}{2.2} = \frac{7+5}{4} = 3$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7)-\sqrt{25}}{2.2} = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Çözüm Kümesi = $\left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$

<u>2.yol</u>

$2x^2 - 7x + 3 = 0$

$2x \quad -1$

$x \quad -3$

$(2x-1).(x-3) = 0$

$2x - 1 = 0 \quad \vee \quad x - 3 = 0$

$x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = 3$

Çözüm Kümesi = $\left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$

ÖRNEK 6: $\sqrt{7-\sqrt{x-1}}=2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $\sqrt{7-\sqrt{x-1}}=2 \Rightarrow \quad 7-\sqrt{x-1}=4$(Her iki tarafın karesi alındı)

$$\Rightarrow \sqrt{x-1}=3$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2=3^2$$
$$\Rightarrow x-1=9$$
$$\Rightarrow x=10$$

Çözüm Kümesi = { 10}

ÖRNEK 7: $x^3+x^2-9x-9=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $x^3+x^2-9x-9=0 \Rightarrow x^2(x+1)-9(x+1)=0$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2-9)=0$$
$$\Rightarrow (x+1)(x-3)(x+3)=0$$
$$\Rightarrow x+1=0 \quad \vee \; x-3=0 \quad \vee \; x+3=0$$
$$\Rightarrow x=-1 \quad \vee \quad x=3 \quad \vee \quad x=-3$$

Çözüm Kümesi = $\{-3,-1,3\}$

ÖRNEK 8: $\sqrt{x+1}+x=2x-5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $\sqrt{x+1}+x=2x-5 \Rightarrow \sqrt{x+1}=x-5$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2=(x-5)^2$$
$$\Rightarrow x+1=x^2-10x+25$$
$$\Rightarrow x^2-10x+25-x-1=0$$
$$\Rightarrow x^2-11x+24=0$$

-3 -8

$$\Rightarrow (x-3)(x-8)=0$$
$$\Rightarrow x-3=0 \quad \vee \; x-8=0$$
$$\Rightarrow x=3 \quad \vee \quad x=8$$

Çözüm Kümesi = $\{3,8\}$

Köklerle katsayılar arasındaki ilişki (ikinci derce denklemler için):

Kökleri x_1 ve x_2 olan bir ikinci derece denklemi

$$(x - x_1).(x - x_2) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade çarpılarak açılırsa

$$x^2 - x.x_2 - x.x_1 + x_1.x_2 = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2).x + x_1.x_2 = 0 \qquad (1)$$

elde edilir. Diğer yandan ikinci derece denkleminin genel formunu ele alıp, tüm terimleri a'ya bölersek

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) aynı ifadelerdir. İkisi de ikinci dereceden bir denklemi ifade eder. O halde bu iki denklemin aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenebilir. Böylece kökler ve katsayılar arasındaki ilişki aşağıdaki eşitlikler olarak ortaya çıkar.

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad\qquad x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$$

ÖRNEK 9: Kökleri 5 ve -7 olan ikinci derece denklemini yazınız.

Çözüm:

$$(x - 5).(x + 7) = 0$$

$$x^2 + 7x - 5x - 35 = 0$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

ÖRNEK 10: Köklerin toplamı -9, çarpımı 4 olan ikinci derece denklemini yazınız.

Çözüm: $x_1 + x_2 = -9$, $\quad x_1.x_2 = 4$ olduğuna göre

$$x^2 - (\underbrace{x_1 + x_2}_{-9}).x + \underbrace{x_1.x_2}_{4} = 0$$

$$x^2 + 9x + 4 = 0$$

ÖRNEK 11: Köklerin toplamı -2, çarpımı 5 olan denklemi yazınız.

Çözüm:

$$x_1 + x_2 = -2 \qquad x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 = 0$$

$$x_1.x_2 = 5 \qquad x^2 - (-2)x + 5 = 0$$

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

ÖRNEK 12: $-x^2+5x+2=0$ ise a) $x_1^2+x_2^2=?$ b) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=?$

Çözüm:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2&=-\frac{b}{a}=-\frac{5}{-1}=5 \\ x_1.x_2&=\frac{c}{a}=\frac{2}{-1}=-2 \end{aligned}\right\}$$ olduğuna göre istenilenleri hesaplayalım.

a) $(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$

$5^2=x_1^2+2.(-2)+x_2^2$

$25=x_1^2-4+x_2^2$

$29=x_1^2+x_2^2$

b) $\underset{(x_1)}{\frac{x_1}{x_2}}+\underset{(x_2)}{\frac{x_2}{x_1}}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1.x_2}=\frac{29}{-2}=-\frac{29}{2}$

ÖRNEK 13: $x^2+(m+2)x-8=0$ *denkleminin* kökleri arasında $\frac{x_1}{4}=\frac{2}{x_2}+4$ bağıntısı olduğuna göre $x_1=?$ $x_2=?$ $m=?$

Çözüm: $\underbrace{1}_{a}x^2+\underbrace{(m+2)}_{b}x\underbrace{-8}_{c}=0$

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-(m+2)$

$x_1.x_2=\frac{c}{a}=\frac{-8}{1}=-8$

$\frac{x_1}{4}=\frac{2}{x_2}+4 \Rightarrow \frac{x_1}{4}=\frac{2+4x_2}{x_2} \Rightarrow \underbrace{x_1.x_2}_{-8}=8+16.x_2$

$-16=16.x_2$

$\boxed{x_2=-1}$

$x_1.\underbrace{x_2}_{-1}=-8 \Rightarrow \boxed{x_1=8}$

$x_1+x_2=-(m+2) \Rightarrow 8+(-1)=-m-2$

$7+2=-m$

$\boxed{m=-9}$

SORULAR

A. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

1) **a)** $6x^2 + x - 1 = 0$

b) $x^2 - 6x + 4 = 0$

c) $2x^2 - 3x + 4 = 0$

d) $2x^2 - 6x + 1 = 0$

e) $4x^2 - 16x + 15 = 0$

f) $3x^2 - 14x + 8 = 0$

g) $5x^2 + 32x - 21 = 0$

2) $\frac{x}{2} - 3x + 4 = 5 - \frac{2x}{3} + x$

3) **a)** $\frac{1}{5x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ **b)** $\frac{x}{5} + \frac{1}{x} = 1$

4) $\frac{2x-1}{3} + \frac{3x+1}{7} = \frac{x}{2} + 1$

5) $\frac{x-1}{x+2} + \frac{3-x}{x-2} = 0$

6) $\frac{1}{8x^2} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{6} = 0$

7) $\frac{x^2+x}{3} + \frac{1}{x^2+x} = \frac{7}{6}$

8) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$

9) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

10) $4x^6 - 2x^3 - 1 = 0$

11) $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$

12) $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = 0$

13) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$

14) $x^3 - 3x^2 - 40x + 84 = 0$

15) $\sqrt{x-3} = \sqrt{x-8} + 2$

16) $\sqrt{x^2 - 3x + 1} = 2x - 1$

17) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2$

18) $\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{2x-4}$

B. Aşağıdaki sorularda istenilenleri bulunuz.

19) $\frac{mx}{2}+3=\frac{x-1}{3}+2$ denkleminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre $m=$?

20) $\frac{x^2+(5-a)x+24}{x^2+8x-33}$ kesri sadeleştirilebilir ise $a=$?

21) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-x+m}$ kesri sadeleştirilebilir ise m=?

22) $\frac{x^2-3x+m}{2x^2-x-1}$ kesrinin sadeleşmiş hali $\frac{x-2}{2x+1}$ olduğuna göre $m=$?

23) $6x^2+(7m-3)x+2m^2-3m-9=0$ denkleminin kökleri eşit ise $m=$?

24) $mx^2-(2m-3)x+m-2=0$ denkleminin iki farklı kök olması için m'nin alabileceği değerler kümesi nedir?

25) $x^2-2(m+1)x+2m+1=0$ denkleminin her iki kökünün de pozitif olması için $m=$?

26) $3x^2-6x+(m-2)=0$ denkleminin kökleri eşit ise m=?

27) $2x^2+mx-3=0$ denkleminin kökleri farklı ise m hangi aralıktadır?

28) $x^2+4x-6=0$ ise $3x_1^3x_2+3x_1x_2^3+4x_1^2-4x_2^2=$?

29) $x^2-12x+m-5=0$ *ve* $3x_1-x_2=4$ *ise* $m=?$ $x_1=?$ $x_2=?$

30) $x^2+(1-m)x+4=0$ ve $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$ ise $m=$? $x_1=$? $x_2=$?

31) $x^2+3x-2m+4=0$ denkleminde $x_1=2x_2$ olması için $m=$? $x_1=$? $x_2=$?

32) $\sqrt{6x-1}=m-x$ denkleminin köklerinin aritmetik ortalamasının 2 olması için $m=$?

------------------------------------ ◈ ------------------------------------

EŞİTSİZLİKLER

$<$, $\leq$, $>$, $\geq$ karşılaştırma operatörleri ile birbirine bağlanmış matematiksel ifadelere *"eşitsizlik"* denir. Daha önce de belirtildiği gibi eşitsizliklerin çözümü genellikle bir aralık veya birden çok aralığın birleşimi şeklindedir. Bundan sonraki örneklerde çözüm aralığını kısaca Ç.A. şeklinde göstereceğiz.

ÖRNEK 1: $3x - 12 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm aralığını bulunuz.

Çözüm: $3x - 12 \geq 0 \Rightarrow \quad 3x \geq 12$

$$\Rightarrow \frac{3x}{3} \geq \frac{12}{3}$$

$$\Rightarrow x \geq 4$$

$$\Rightarrow Ç.A. = [4, +\infty)$$

ÖRNEK 2: $5x - 7 < 3x + 2$ eşitsizliğinin çözüm aralığını bulunuz.

Çözüm: $5x - 7 < 3x + 2 \Rightarrow \quad 5x - 3x < 2 + 7$

$$\Rightarrow \quad 2x < 9$$

$$\Rightarrow x < \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow Ç.A. = \left(-\infty, \frac{9}{2}\right)$$

ÖRNEK 3: $\frac{3x}{2} + 9 - x > \frac{4x}{3} - 2x + 5$ eşitsizliğinin çözüm aralığını bulunuz.

Çözüm: $\frac{3x}{2} + 9 - x > \frac{4x}{3} - 2x + 5 \Rightarrow \frac{3x}{2} - \frac{4x}{3} - x + 2x > 5 - 9$

$$\Rightarrow \underset{(3)}{\frac{3x}{2}} - \underset{(2)}{\frac{4x}{3}} + \underset{(6)}{x} > -4$$

$$\Rightarrow \frac{9x - 8x + 6x}{6} > -4$$

$$\Rightarrow \frac{7x}{6} > -4$$

$$\Rightarrow 7x > -24$$

$$\Rightarrow x > \frac{-24}{7} \Rightarrow Ç.A. = \left(\frac{-24}{7}, \infty\right)$$

Not: İkinci veya daha yüksek dereceden eşitsizliklerin çözüm aralıklarını bulmak için işaret tablolarından yararlanılır. Bu tablolar eşitsizlerin özelliklerinden sonra verilmiştir.

Eşitsizliklerin özellikleri:

1) Bir eşitsizliğin her iki yanına aynı sayı eklenir veya çıkarılırsa eşitsizlik bozulmaz.

   $a, b, c \in \mathbb{R}$ o.ü. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

2) Bir eşitsizliğin her iki yanı pozitif bir sayı ile çarpılırsa eşitsizlik bozulmaz.

   $a, b \in \mathbb{R}\ ve\ c \in \mathbb{R}^+$ o.ü. $a < b \Rightarrow a.c < b.c$

★ 3) Bir eşitsizliğin her iki yanı negatif bir sayı ile çarpılırsa eşitsizlik yön değiştirir.

   $a, b \in \mathbb{R}\ ve\ c \in \mathbb{R}^-$ o.ü. $a < b \Rightarrow a.c > b.c$

   $(a < b \Rightarrow -a > -b)$

4) Yönleri aynı olan eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir.

$$\begin{array}{r} a < b \\ + \quad c < d \\ \hline a + c < b + d \end{array}$$

5) Yönleri aynı olan eşitsizlikleri taraf tarafa çarpma veya bölme her zaman doğru olmaz (örnek veriniz).

6) $a < b < c \Rightarrow a < c$

7) $a > 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$

8) $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

9) $a < b \Rightarrow a - b < 0 \quad veya \ \ b - a > 0$

Not: Yukarıdaki özellikler "<" için verilmiştir. Bu özellikler $>$, $\leq$, $\geq$ için de uyarlanabilir.

İşaret Tabloları

Daha önce de belirtildiği gibi ikinci dereceden ve daha yüksek dereceden eşitsizliklerin çözüm aralığını bulmak için işaret tablolarından yararlanılır. Ayrıca kesirli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulmak için de işaret tablosu hazırlanabilir. İşaret tablolarını hazırlamak için öncelikle verilen ifadelerin kökleri bulunur. Bu kökler tabloya sayı doğrusu üzerindeki büyüklük sırasına göre yerleştirilir ve oluşan aralıkların işaretleri aşağıdaki kurallara göre belirlenir.

1) **$ax + b$ ifadesinin işaret tablosu:**

$x = -\frac{b}{a}$

	$-\infty$	x	$+\infty$
$ax + b$	a'nın işaretinin tersi	0	a'nın işaretinin aynısı

2) **$ax^2 + bx + c$ ifadesinin işaret tablosu:**

$\Delta = b^2 - 4ac$ değerine bağlı olarak üç durum söz konusudur.

- $\Delta > 0$ $\Rightarrow$ İki farklı reel kök vardır

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a'nın işaretinin aynısı	0	a'nın işaretinin tersi	0	a'nın işaretinin aynısı

- $\Delta = 0$ $\Rightarrow$Kökler çakışıktır

$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a'nın işaretinin aynısı		a'nın işaretinin aynısı

- $\Delta < 0$ $\Rightarrow$Reel kök yoktur.

3) **Yüksek dereceli ifadelerin işaret tablosu:**

Yukarıdaki iki kuralı göz önüne alarak bir genelleme yapalım:

- **Tek** dereceli ifadelerde a'nın işaretinin **tersi** ile başlanır ve sırayla işaret değiştirerek devam edilir. Çakışık köklerde işaret değiştirilmez.
- **Çift** dereceli ifadelerde a'nın işaretinin **aynısı** ile başlanır ve sırayla işaret değiştirerek devam edilir. Çakışık köklerde işaret değiştirilmez.

ÖRNEK 4: $2x-6<0$ eşitsizliğinin çözüm aralığını bulunuz.

Çözüm:

$x=3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$	0	$+$	

Soruda ifadenin sıfırdan küçük olduğu yerler istendiği için işaret tablosunda "$-$" yazılan aralık çözüm aralığı olur.

$$Ç.A.=(-\infty,3)$$

Not: Eğer $<$ yerine $\leq$ kullanılsaydı çözüm aralığına 3 sayısı da dahil olurdu. Yani cevap $Ç.A.=(-\infty,3]$ olurdu. Bu nedenle soruda eşitsizliğin işaretine dikkat ediniz.

ÖRNEK 5: $x^2-10x+21\leq 0$ eşitsizliğinin çözüm aralığını bulunuz.

Çözüm: Önce $x^2-10x+21=0$ denkleminin köklerini bulmalıyız.

$x^2-10x+21=0$

-3 -7

$(x-3).(x-7)=0$

$x-3=0 \quad \vee \quad x-7=0$

$x=3 \quad \vee \quad x=7$

x	$-\infty$		3		7		∞
$x^2-10x+21$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ç.A.=[3,7]

ÖRNEK 6: $2x^2+7x-15>0$ eşitsizliğinin çözüm aralığını bulunuz.

Çözüm: Önce $2x^2+7x-15>0$ denkleminin köklerini bulmalıyız.

$2x \quad -3$

$x \quad 5$

$10x-3x=7x$

$(2x-3)(x+5)=0$

$2x-3=0 \quad \vee \quad x+5=0$

$x=\frac{3}{2} \quad \vee \quad x=-5$

	$-\infty$		-5		$\frac{3}{2}$		∞
$2x^2+7x-15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$(-\infty,-5)$ $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$

Çözüm aralığı yukarıdaki tabloda taranmış olan iki aralığın birleşimidir.

$$Ç.A.=(-\infty,-5)\cup\left(\frac{3}{2},\infty\right)$$

ÖRNEK 7: $\dfrac{x^2-4}{x-5} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm aralığını bulunuz.

Çözüm:

$x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=\mp 2$

$x-5=0 \quad \Rightarrow \quad x=5$

x	$-\infty$		-2		2		5		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2-4}{x-5}$		$-$		$+$		$-$		$+$	

$Ç\,.\,A=[-2\,,\,2]\cup(5\,,\,+\infty)$

ÖRNEK 8: $\dfrac{x^2-6x+9}{x\,.\,(x-4)} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm aralığını bulunuz?

Çözüm:

$x^2-6x+9=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=x_2=3$

$x.(x-4)=0 \quad \Rightarrow \quad x_3=4\,,\; x_4=0$

x	$-\infty$		0		3		4		$+\infty$
x^2-6x+9		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x.(x-4)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2-6x+9}{x.(x-4)}$		$+$		$-$		$-$		$+$	

$Ç\,.\,A=(0\,,\,4)$

NOT: Soruda $\leq$ kullanılması, [0,4] kapalı aralığı yazmamızı gerektirir. Oysa açık aralık yazdık. Çünkü bu değerler paydayı sıfır yapar ve dahil edilmemesi gerekir. Bu önemli noktaya dikkat ediniz.

SORULAR

1) $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x < 2$, $y < 5$, $z > 6$ ise $x + 2y - 3z$ ifadesinin alabileceği **en büyük** tam sayı değer nedir ?

2) $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere , $-x < 4,\ \ y < -10,\ \ z > 2$ ise $2x - y + 3z$ ifadesinin alabileceği **en küçük** tam sayı değer nedir ?

3) $4x^2 - 2\sqrt{5}\ x + 1 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

4) $\frac{1}{x} - \frac{2}{3x} \geq 1$ eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

5) $2x - 4 + \frac{x}{2} < 5 + \frac{3x}{2}$ eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

a) $\frac{x-2}{2x-1} > 4$ 〃 〃 〃 〃

6) $\frac{9}{x-2} - 1 > \frac{4}{x}$ 〃 〃 〃 〃

7) **a)** $x - 3 \leq 2x - 4 < x + 5$ 〃 〃 〃 〃

b) $3x - 4 < 2x + 4 \leq 4x - 1$ 〃 〃 〃

8) $\frac{(1-x).(x^2+2x-3)}{x-2} < 0$ 〃 〃 〃

9) $\frac{x^2-9}{x.(x^2+2x-15)} > 0$ 〃 〃 〃

10) $\frac{(x^2-4x-12).x}{x^2-5x+6} \leq 0$ 〃 〃 〃

11) $\frac{-2x^2+5x+3}{x.(x+4).(x+1)} \leq 0$ 〃 〃 〃

12) $\left.\begin{array}{r} 2x - 1 \leq x + 5 \\ 3 - x < x + 4 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm aralığını bulunuz.

13) $\left.\begin{array}{l} x^2 - 3x - 10 < 0 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm aralığını bulunuz ($x \in \mathbb{Z}$).

14) $\left.\begin{array}{l} x^2 - 4x \geq 0 \\ \dfrac{2x-1}{x+5} \leq 0 \\ \dfrac{-2x}{3-x} > 0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm aralığını bulunuz.

15) $\left.\begin{array}{l} 0 < \dfrac{x-1}{2} < 3 \\ -3 \leq 2x + 1 \leq 11 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm aralığını bulunuz.

------------------------------------ ◈ ------------------------------------

MUTLAK DEĞER

Tanım: Bir $x \in \mathbb{R}$ sayısının mutlak değeri şu şekilde tanımlanır:

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Mutlak değerin geometrik anlamı, herhangi bir noktanın başlangıç noktasına (yani orijin veya (0,0) noktasına) olan uzaklığıdır. Örneğin;

$|6| = 6$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$, $\left|\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$, $|-5{,}7| = 5{,}7$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & ; \quad x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & ; \quad x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & ; \quad x \geq 1 \\ 1-x & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

Mutlak Değerin Özellikleri:

$a, b, x, \varepsilon \in \mathbb{R}$ve ε sıfırdan büyük yeterince küçük bir sayı olmak üzere;

1) $|a| = |-a|$
2) $|a-b| = |b-a|$
3) $|a.b| = |a|.|b|$
4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
5) $|a+b| \leq |a| + |b|$
6) $|a| - |b| \leq |a-b|$
7) $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$
8) $|x-a| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$
9) $|x-a| > \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x < a-\varepsilon \quad , \quad x > a+\varepsilon$
10) $\sqrt{x^2} = \mp x = |x|$

ÖRNEK 1: $|x-6| < 10$ eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

Çözüm: $-10 < x-6 < 10$

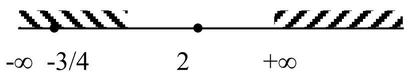
$-10+6 < x-6+6 < 10+6$

$-4 < \quad x \quad < 16 \quad \Rightarrow \quad Ç.A. = (-4,16)$

ÖRNEK 2: $\left|5-8x\right| \geq 11$ eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

Çözüm:

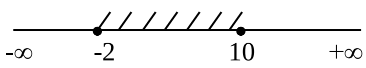
$$5-8x \geq 11 \qquad\qquad 5+8x \geq 11$$
$$-8x \geq 11-5 \qquad\qquad 8x \geq 11+5$$
$$-8x \geq 6 \qquad\qquad 8x \geq 16$$
$$x \leq \frac{-3}{4} \qquad\qquad x \geq 2 \qquad\qquad Ç.A=\left(-\infty,\frac{-3}{4}\right]\cup\left[2,+\infty\right)$$



ÖRNEK 3: $\left|x-4\right|+2<8$ eşitsizliğinin çözüm aralığını bulunuz

Çözüm:

$$\left|x-4\right|<6 \;\Rightarrow\; x-4<6 \quad , \quad -x+4<6$$
$$x<10 \quad , \quad x>-2$$
$$-2<x<10 \qquad \Rightarrow \qquad Ç.A=(-2\,,10)$$



ÖRNEK 4: $2 \leq \left|3-x\right| < 5$ eşitsizliğinin çözüm aralığını bulunuz?

Çözüm:

1.Durum: $2 \leq \left|3-x\right|$

$$2 \leq 3-x \qquad\qquad 2 \leq x-3$$
$$x \leq 1 \qquad\qquad x \geq 5$$

2.Durum: $\left|3-x\right| < 5$

$$3-x<5 \qquad\qquad x-3<5$$
$$x>-2 \qquad\qquad x<8$$

$$Ç.A=(-2\,,\,1]\cup[5-8)$$

ÖRNEK 5: $\left|4-\left|2x+2\right|\right|=6$ eşitliğinin çözüm kümesini bulunuz?

Çözüm:

1.Durum:

$$\left|4-\left|2x+2\right|\right|=6 \;\Rightarrow\; \left|2x+2\right|=-2$$

$$2x+2=-2 \;\Rightarrow\; x=-2 \;\;\times$$
$$-2x-2=-2 \;\Rightarrow\; x=0 \;\;\times$$

2.Durum:

$$\left|2x+2\right|-4=6 \;\Rightarrow\; \left|2x+2\right|=10$$

$$2x+2=10 \;\Rightarrow\; x=4 \;\;\checkmark$$
$$-2x-2=10 \;\Rightarrow\; x=-6 \;\;\checkmark$$

$$Ç.K.=\{-6,4\}$$

SORULAR

A. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

1) $\big||x-2|-5\big| = 3$

2) $\big||2x-3|-7\big| = 4$

3) $|3x-3|+2 = |4-4x|$

4) $|4-2x|+3 = x-1$

5) $|3x-2|-|x+1| = x+2$

6) $|x-2|-3|x^2-3x+2| = 0$

B. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm aralıklarını bulunuz.

7) $|4-x| \leq 8$

8) $|7-6x| \geq 11$

9) $|3x+1|+x > 3-x$

10) $|x|+|x-2| \geq 4$

11) $|x-1| \leq 9-|2-2x|$

12) $2 < |x+4| \leq 10$

13) $8 < |2x-4| \leq 12$

C. Aşağıda istenenleri bulunuz.

14) $\left|\sqrt{3}-2\right|+\left|\sqrt{3}-5\right|+\left|4-\sqrt{3}\right| =?$

15) $\left|8+\sqrt{45}\right|-\left|\sqrt{5}-3\right|-\left|5-4\sqrt{5}\right| =?$

16) $|a-b-6|+|c+8| = 0$ olduğuna göre $a-b-c =?$

17) $\left|\frac{2}{x-3}\right| \geq \frac{1}{3}$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tamsayısı vardır?

18) $|x-3|+|6-2x| = 12$ denklemininköklerinin toplamı kaçtır?

19) $\frac{|-x|+|-2x|}{|x|+5} = 2$ denklemini sağlayan x değerlerinin çarpımı nedir?

20) $|x|+|y| \leq 2$ eşitsizliğinin koordinat düzleminde gösterdiği bölgeyi çiziniz.

------------------------------------ ◈ ------------------------------------

ORAN VE ORANTI

Aynı anda her ikisi birden sıfır olmamak üzere ∀a,b∈ℝ için $\frac{a}{b}$ ifadesine *"a'nın b'ye oranı"* denir.

Birden çok oranın eşitliğine de *"orantı"* denir. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ orantısında a ve d *dışlar*, b ve c *içler* olarak isimlendirilir. k ise *orantı sabiti*dir.

Orantının özellikleri:

1) İçler çarpımı, dışlar çarpımına eşittir.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \quad a.d=b.c$$

2) İçler-dışlar çarpımı eşitliğini bozmayacak şekilde sayılar yer değiştirebilir.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \quad \text{veya} \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad \text{veya} \quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

3) Bir orantıda,paylar toplamını (veya farkını) paydalar toplamına (veya farkına) böldüğümüzde orantı sabiti değişmez.

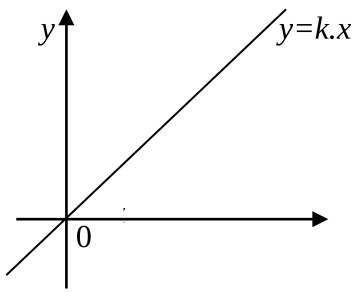
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+c+e}{b+d+f}=k$$

Bu özellik, her oranda belli bir katın alınması durumunda da geçerlidir. Örneğin;

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3a-2c+4e}{3b-2d+4f}=k$$ şeklinde yazılabilir.

Doğru orantı: Orantılı iki çokluktan biri artarken diğeri de aynı oranda artıyorsa ya da biri azalırken diğeri de aynı oranda azalıyorsa bu iki çokluk doğru orantılıdır denir.

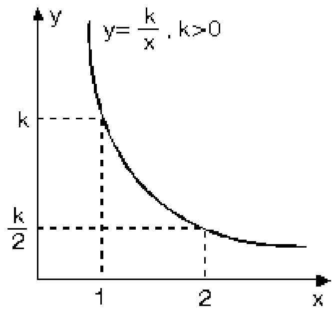
x ile y doğru orantılı ve k pozitif bir doğru orantı sabiti olmak üzere, $y=k.x$ ifadesine doğru orantının denklemi denir.Doğru orantının grafiği aşağıda görüldüğü gibi orijinden geçen bir doğrudur.



Örneğin;
İşçi sayısı ile yapılan iş miktarı (ya da üretilen ürün miktarı) doğru orantılıdır.
Bir aracın hızı ile aldığı yol doğru orantılı, zaman ile ters orantılıdır.

Ters orantı: Orantılı iki çokluktan biri artarken diğeri aynı oranda azalıyorsa ya da biri artarken diğeri aynı oranda azalıyorsa bu iki çokluk ters orantılıdır denir.

x ile y ters orantılı ve k pozitif bir ters orantı sabiti olmak üzere, $y = \frac{k}{x}$ ifadesine ters orantının denklemi denir. Ters orantının grafiği aşağıda görüldüğü gibi bir eğridir.



Örneğin;
İşçi sayısı ile işin bitirilme süresi ters orantılıdır.
Bir aracın belli bir yolu aldığı zaman ile hızı ters orantılıdır.

Özet olarak;
İki çokluk **doğru** orantılı ise **bölümleri** orantı sabitini verir
İki çokluk **ters** orantılı ise **çarpımları** orantı sabitini verir

Mesela a sayısı 3 ve 4 sayısı ile doğru, 5 sayısı ile ters orantılı ise denklemimiz şu şekilde olmalıdır:

$$\frac{a.5}{3.4} = k$$

Bu denklemden de $5a = 12k$ olduğu görülür.

Not: Genellikle bir ifadede orantını türü belirtilmeyip sadece “orantılıdır” şeklinde kullanılmışsa bu ifade “doğru orantılıdır” şeklinde kabul edilir.

ÖRNEK 1: Bir otomobil 8 litre benzinle 120 km yol alıyor. 165 km yol gitmesi için kaç litre benzin gerekir?

Çözüm: 8 litre 120 km yol

x litre 165 km yol

Doğru orantı $120.x = 165.8 \Rightarrow x = 11$ litre

ÖRNEK 2: Bir işi 3 işçi 18 günde yapıyorsa, aynı işi 9 işçi kaç günde yapar?

Çözüm:

3 işçi 18 günde

9 işçi x günde

Ters orantı $9.x=3.18 \Rightarrow x = 6$ gün

ÖRNEK 3: a sayısı 3 ile, b sayısı 7 ile doğru orantılı ve $a + b = 40$ ise bu sayılar nedir?

Çözüm: $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = k \quad \Rightarrow \quad a = 3k \ , \ b = 7k$

$a + b = 40 \quad \Rightarrow \quad 3k + 7k = 40 \quad \Rightarrow \quad 10k = 40 \quad \Rightarrow \quad k = 4$

$k = 4$ olduğuna göre $a = 3k = 3.4 = 12$, $b = 7k = 7.4 = 28$ olur.

Cevap: $a = 12 \quad b = 28$

ÖRNEK4: 2100 TL üç kişi arasında 2, 3 ve 5 sayıları ile orantılı olacak şekilde paylaştırılırsa her biri kaç TL alır?

Çözüm:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k \qquad ve \ \ a + b + c = 2100$$

$$2k + 3k + 5k = 2100$$

$$10k = 2100$$

$$k = 210$$

Buna göre $a = 2k = 2.210 = 420$, $b = 3k = 3.210 = 630$, $c = 5k = 5.210 = 1050$

Cevap: $a = 420$, $b = 630$, $c = 1050$

ÖRNEK5: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{d}{a} = \frac{1}{2}$ olduğuna göre $\frac{a+c}{b} + \frac{b+d}{a}$ toplamı kaçtır?

Çözüm: Verilen orantıyı kullanarak tüm bilinmeyenleri a cinsinden yazabilir veya parçalayarak yazabiliriz. İkinci seçenekle çözelim.

$$\frac{a+c}{b} + \frac{b+d}{a} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$
$$= \frac{1}{2} + 2 + 2 + \frac{1}{2} = 5$$

ÖRNEK 6: Bir dikdörtgenin kenar uzunlukları 3 ve 4 ile, alanı ise 24 ile orantılı olduğuna göre bu dikdörtgenin çevre uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:

Dikdörtgenin kenar uzunluklarını a ve b ile gösterirsek, $a = 3k$, $b = 4k$ olur.

Alan $= a.b = 3k.4k = 24k \Rightarrow \quad k = 2$

$a = 3k = 3.2 = 6$, $\qquad b = 4k = 4.2 = 8$

Çevre $= 2(a+b) = 2(6+8) = 28$

ORTALAMALAR

1) **Aritmetik Ortalama**

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ şeklinde n tane sayının aritmetik ortalaması şu şekildedir:

$$\boxed{A.O. = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}}$$

Buna göre

a ve *b* gibi iki sayı için $A.O. = \frac{a+b}{2}$

a,*b* ve c gibi üç sayı için $A.O. = \frac{a+b+c}{3}$

2) **Geometrik Ortalama:**

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ şeklinde n tane sayının geometrik ortalaması şu şekildedir:

$$\boxed{G.O. = \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3.\ldots.x_n}}$$

Buna göre

a ve *b* gibi iki sayı için $G.O. = \sqrt{a.b}$

a,*b* ve c gibi üç sayı için $G.O. = \sqrt[3]{a.b.c}$

3) **Harmonik Ortalama:**

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ şeklinde n tane sayının harmonik ortalaması şu şekildedir:

$$\boxed{H.O. = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ \dots + \frac{1}{x_4}}}$$

Buna göre

a ve b gibi iki sayı için $H.O. = \frac{2ab}{a+b}$

a,b ve c gibi üç sayı için $H.O. = \frac{3abc}{ab+ac+bc}$

Bu üç ortalama arasında

H.O. ≤ G.O ≤ A.O

eşitsizliği yazılabilir. eşitlik durumu ise $a = b = c$ durumunda sağlanır.

ÖRNEK 7: a ve b gibi iki sayının aritmetik ortalaması 12, geometrik ortalaması 6 ise bu iki sayının harmonik ortalaması nedir?

Çözüm: $A.O. = \frac{a+b}{2} = 12 \quad \Rightarrow \quad a + b = 24$

$G.O. = \sqrt{a.b} = 6 \quad \Rightarrow \quad a.b = 36$

$$H.O. = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2.36}{24} = 3$$

ÖRNEK 8: a ve b gibi iki sayının geometrik ortalaması 6 dır. Bu sayılar 3'er arttırılırsa geometrik ortalamaları 9 olduğuna göre $a + b$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$\sqrt{a.b} = 6 \quad \Rightarrow \quad a.b = 36$

$\sqrt{(a+3).(b+3)} = 9 \quad \Rightarrow (a+3).(b+3) = 81$

$\Rightarrow \quad ab + 3a + 3b + 9 = 81$

$\Rightarrow \quad ab + 3(a+b) = 72$

$\Rightarrow \quad 36 + 3(a+b) = 72$

$\Rightarrow \quad 3(a+b) = 36$

$\Rightarrow \quad a + b = 12$

SORULAR

1) a,b$\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\frac{a^2-1}{2}=\frac{1}{2b+6}=\frac{3}{4}$ ise $a=?$ $b=?$

2) $x,y,z\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\frac{x-y}{y-4}=\frac{3}{z+1}=\frac{6}{2x-14}=\frac{z-1}{5}$ ise $x=?$ $y=?$ $z=?$

3) $\frac{a}{b}=\frac{c}{a}=3$ ise $\frac{a+c}{b}$ oranı kaçtır?

4) a,b$\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere a ve b sayıları sırası ile 3 ve 5 ile orantılıdır. $a+b=16$ olduğuna göre $\sqrt{b^2-a^2}=?$

5) a ve b pozitif sayıları sırasıyla 5 ve 13 ile orantılıdır. $4a-b=14$ olduğuna göre bu sayıların toplamı nedir?

6) $\frac{a}{4}=\frac{b}{6}=\frac{c}{10}$ ve $4a-6b+8c=60$ olduğuna göre $a^2+2b-3c=?$

7) Bir x sayısı y^2 ile doğru, $(z-1)$ ile ters orantılıdır. $y=3,\ z=4$ iken $x=2$ olduğuna göre $x=4,\ y=6$ iken $z=?$

8) $4a^2-7ab+3b^2=0$ olduğuna göre $\frac{a}{b}$ oranı kaçtır?

9) $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$, $\frac{b}{2}=\frac{c}{4}$ ise $\frac{a+b+c}{b}$ **:** $\frac{a+c}{b}$ = ?

10) $\frac{a+b}{3}=\frac{b}{2}=\frac{c}{7}$ ve $a+2b+3c=78$ ise $a+b+c=?$

11) $a=8$ $b=12$ $c=18$ sayıları için aşağıdaki ortalamaları hesaplayınız.

a) A.O =? b) G.O =? c) H.O =?

12) 9 ve 10 ile orantılı iki sayının farkı 10 ise çarpımları nedir?

13) Bir makinede arka arkaya birbirini çeviren x,y,z dişli çarklarının diş sayıları toplamı 86 dır. x 25 kez dönerken, y 30 kez, z 45 kez döndüğüne göre her çarkta kaç diş vardır?

14) Üç sayının aritmetik ortalaması 8, kareleri toplamı 336 ise ikişer ikişer çarpımlarının toplamı kaçtır? (ab+ac+bc=?)

15) Güneşli bir günde 168 cm boyundaki bir gencin gölgesi 189 cm ise, gölgesi 180 cm olan arkadaşının boyu kaçtır?

16) Elliden küçük ardışık pozitif tamsayıların aritmetik ortalaması kaçtır ?

17) $x=2y=4z$ ve x, y, z sayılarının geometrik ortalaması 6 dır. Buna göre bu üç sayının aritmetik ortalaması kaçtır ?

18) Bir öğrencinin beşdersinin not ortalaması 67 tir. Staj notu da eklenince ortalaması 72 olduğuna göre bu öğrencinin staj notu kaçtır?

19) $2^{x-2}, 4^{x+1}, 8^{x-3}$ sayılarının dördüncü orantılısı 128 ise $x = ?$

$\left(not: \ \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x} \text{ orantısında } x\text{'e dördüncü orantılı denir.}\right)$

20) 8 işçi 16 parça makineyi 12 saatte taşıyorsa 10 işçi 20 parça makineyi kaç saatte taşır?

21) Bir dairenin çevre uzunluğu %50 oranında kısaltıldığında alanı % kaç küçülmüş olur?

22) a ve b sayılarının harmonik ortalaması $\frac{16}{3}$ ve $2a - 3b = 4$ olduğuna göre a ve b sayılarını bulunuz.

23) On tane sayının ortalaması 14 tür. Bu sayılardan bir kısmı 2'şer arttırılıp, kalan kısmı 2'şer azaltıldığında ortalama 13,6 olduğuna göre kaç tanesi arttırılıp kaç tanesi azaltılmıştır?

24) 330 adet ürün üç kişi arasında 1, $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{3}$ sayıları ile orantılı olacak şekilde paylaştırılırsa her biri kaçar ürün alır ?

------------------------------------ ◈ ------------------------------------

ÜSLÜ VE KÖKLÜ İFADELER

Üslü Sayı: $a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n tane a sayısının çarpımına "*a'nın n.ci kuvveti*" denir (a üssü n şeklinde de okunabilir).

$$\underset{\text{taban}}{a}^{\overset{\text{üs}}{n}} = \underbrace{a.a.a.\ \ldots\ .a}_{n \text{ tane}}$$

Örneğin;

$3^4 = 3.3.3.3 = 81$

$(-2)^5 = (-2).(-2).(-2).(-2).(-2) = -32$

$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right).\left(\frac{3}{5}\right).\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{27}{125}$

$\left(\sqrt{2}\right)^4 = \sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2} = 4$

Köklü Sayı: Bir b sayısının n.ci kuvveti a ise ($b^n = a$), b'ye "*a'nın n.ci kuvvetten (dereceden) kökü*" denir ve $\sqrt[n]{a}$ veya $a^{\frac{1}{n}}$ şeklinde gösterilir.

$$b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\boxed{b^n = a \quad \begin{array}{l} n \text{ çift ise } b = \mp\sqrt[n]{a} \\ n \text{ tek ise } b = \sqrt[n]{a} \end{array}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \quad \begin{array}{l} \nearrow \sqrt[çift]{a} \Rightarrow a \geq 0 \text{ olmalı} \\ \searrow \sqrt[tek]{a} \Rightarrow a \in R \end{array}}$$

Örneğin;

$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

$\sqrt{-6} \notin \mathbb{R}$

$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^3.2^3.2} = \sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2} = 2.2.\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

NOT: 2.dereceden köklerin (yani kareköklerin) derecesi yazılmaz.

Özellikler:

$x,y \in \mathbb{R}$-{0} ve $a,b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

1. $a^0 = 1$
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$
3. $x^a . x^b = x^{a+b}$
4. $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
5. $(x^a)^b = x^{a.b}$
6. $(x.y)^a = x^a . y^a$
7. $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$
8. $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \left(\frac{y}{x}\right)^{-a}$
9. $\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$
10. $\sqrt[a]{x.y} = \sqrt[a]{x}.\sqrt[a]{y}$
11. $\frac{\sqrt[a]{x}}{\sqrt[a]{y}} = \sqrt[a]{\frac{x}{y}}$
12. $\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}} = \sqrt[a.b]{x}$
13. $\sqrt[n]{x.\sqrt[n]{x.\sqrt[n]{x.\dots}}} = \sqrt[n-1]{x}$
14. $\sqrt[n]{x:\sqrt[n]{x:\sqrt[n]{x:\ \dots}}} = \sqrt[n+1]{x}$
15. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} = \frac{1+\sqrt{4x+1}}{2}$
16. $\sqrt{x \mp 2.\sqrt{y}}$ kalıbı: eğer $a.b = y$ ve $a + b = x$ olacak şekilde a ve b sayıları

    varsa $\sqrt{x \mp 2.\sqrt{y}} = \left|\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\,\right|$ şeklinde yazılabilir.

SORU: Yukarıdaki 13., 14., 15. özelliklerin ıspatını yapınız.

SORU: 16. Özelliğe göre aşağıdaki ifadelerin eşitini yazınız.

a) $\sqrt{12+2\sqrt{27}}$ d) $\sqrt{15+2\sqrt{54}}$

b) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$ e) $\sqrt{7-\sqrt{48}}$

c) $\sqrt{14-2\sqrt{45}}$ f) $\sqrt{10+\sqrt{64}}$

ÖRNEK 1: $\sqrt{75}-10\sqrt{27}+9\sqrt{48}=?$

Çözüm: $\sqrt{75}-10\sqrt{27}+9\sqrt{48}=\sqrt{3.25}-10\sqrt{3^3}+9\sqrt{3.16}$

$$=\sqrt{3.5^2}-10\sqrt{3^2.3}+9\sqrt{3.4^2}$$

$$=5\sqrt{3}-10.3\sqrt{3}+9.4\sqrt{3}$$

$$=5\sqrt{3}-30\sqrt{3}+36\sqrt{3}$$

$$=11\sqrt{3}$$

ÖRNEK 2: $\frac{\sqrt{0,49}+\sqrt{0,25}-\sqrt{0,64}}{\sqrt{49}+\sqrt{25}-\sqrt{64}}=?$

Çözüm: $\frac{\sqrt{(0,7)^2}+\sqrt{(0,5)^2}-\sqrt{(0,8)^2}}{\sqrt{7^2}+\sqrt{5^2}-\sqrt{8^2}}=\frac{0,7+0,5-0,8}{7+5-8}$

$$=\frac{0,4}{4}=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}=10^{-1}$$

ÖRNEK 3: $\frac{6^5.14^4.15^3}{21^4.10^2.12^3}=?$

Çözüm: $\frac{6^5.14^4.15^3}{21^4.10^2.12^3}=\frac{(2.3)^5.(2.7)^4.(3.5)^3}{(3.7)^4.(2.5)^2.(2.6)^3}=\frac{6^5.2^4.7^4.3^3.5^3}{3^4.7^4.2^2.5^2.2^3.6^3}$

$$=6^2.2^{-1}.3^{-1}.5$$

$$=6^2.6^{-1}.5=6.5=30$$

ÖRNEK 4: $a^3.\sqrt[x]{a^{5x+4}}=\sqrt[x]{a^{28}}$denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $a^3.\sqrt[x]{a^{5x+4}}=\sqrt[x]{a^{28}}$

$$a^3.a^{\frac{5x+4}{x}}=a^{\frac{28}{x}}$$

$$a^{3+\frac{5x+4}{x}}=a^{\frac{28}{x}}$$

$$a^{\frac{8x+4}{x}}=a^{\frac{28}{x}}$$

tabanlar eşit olduğuna göre üstler de eşittir. Buna göre:

$$\frac{8x+4}{x}=\frac{28}{x}\Rightarrow\ 8x+4=28\ \Rightarrow\ 8x=24\ \Rightarrow x=3$$

ÖRNEK 5: $(0{,}0256)^{\frac{3}{4}}.10^4$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm: $(0{,}0256)^{\frac{3}{4}}.10^4=(256.10^{-4})^{\frac{3}{4}}.10^4$

$$=(2^8.10^{-4})^{\frac{3}{4}}.10^4$$

$$=2^6.10^{-3}.10^4$$

$$=64.10$$

$$=640$$

ÖRNEK 6: $\dfrac{\sqrt[3]{4\sqrt{20}}.\sqrt{2\sqrt{\sqrt{625}}}}{4\sqrt{5}}=?$

Çözüm:

$$\frac{\sqrt[3]{4\sqrt{20}}.\sqrt{2\sqrt{\sqrt{625}}}}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{4^2.4.5}}.\sqrt{\sqrt{2^2\sqrt{5^4}}}}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt[6]{4^3.5}.\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^4.5^4}}}}{4\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt[6]{4^3.5}.\sqrt[8]{2^4.5^4}}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{4}.\sqrt[6]{5}.\sqrt{2}.\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=\frac{2.\sqrt[6]{5}.\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt[6]{5}.\sqrt[6]{8}}{2}=\frac{\sqrt[6]{40}}{2}$$

ÖRNEK 7: $\dfrac{3^x+6^x+9^x}{3^x+2^x+1}=8.6^x$ olduğuna göre $x=?$

Çözüm: $\dfrac{3^x+(2.3)^x+(3^2)^x}{3^x+2^x+1}=2^3.(2.3)^x$

$$\frac{3^x+2^x.3^x+3^x.3^x}{3^x+2^x+1}=2^3.2^x.3^x$$

$$\frac{3^x(1+2^x+3^x)}{3^x+2^x+1}=2^3.2^x.3^x$$

$$3^x=2^3.2^x.3^x$$

$$3^x.3^{-x}=2^{3+x}$$

$$1=2^{3+x}\Rightarrow\ 3+x=0\quad\Rightarrow x=-3$$

Paydanın rasyonel yapılması:

1. $\frac{p}{\sqrt[a]{x^b}}$ türünden kesirlerin paydasını rasyonel yapmak için pay ve payda $\sqrt[a]{x^{a-b}}$ ile çarpılır.
2. $\frac{p}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ türünden kesirlerin paydasını rasyonel yapmak için pay ve payda $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ile çarpılır $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\text{ise } \sqrt{x}+\sqrt{y} \text{ ile çarpılır.}\right)$.
3. a) $\frac{p}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$ türünden kesirlerin paydasını rasyonel yapmak için pay ve payda $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$ ile çarpılır.

   b) $\frac{p}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$ türünden kesirlerin paydasını rasyonel yapmak için pay ve payda $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$ ile çarpılır.

Buradaki 3.madde karmaşık gibi görünse de aslında $a^3 \pm b^3$ açılımından kaynaklanmaktadır.

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ olduğunu biliyoruz. $a=\sqrt[3]{x}$ ve $b=\sqrt[3]{y}$ dersek

$$\begin{aligned}(\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{a}+\underbrace{\sqrt[3]{y}}_{b}).(\underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_{a^2}-\underbrace{\sqrt[3]{xy}}_{a.b}+\underbrace{\sqrt[3]{y^2}}_{b^2}) &= (a+b)(a^2-ab+b^2)\\ &= a^3+b^3\\ &= \sqrt[3]{x}^3+\sqrt[3]{y}^3\\ &= x+y\end{aligned}$$

olur. Aynı durum ters işaret için de geçerlidir.

ÖRNEK 8: $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ kesrinin paydasını rasyonel yapınız.

Çözüm:
$$\frac{4}{\underset{\left(\sqrt[3]{2^2}\right)}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{4\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2\cdot 2^2}} = \frac{4\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{4\cdot\sqrt[3]{4}}{2} = 2.\sqrt[3]{4}$$

ÖRNEK 9: $\frac{11}{7+\sqrt{5}}$ kesrinin paydasını rasyonel yapınız.

Çözüm:
$$\frac{11}{\underset{\left(7-\sqrt{5}\right)}{7+\sqrt{5}}} = \frac{11\cdot\left(7-\sqrt{5}\right)}{7^2-\sqrt{5}^2} = \frac{11\left(7-\sqrt{5}\right)}{49-5} = \frac{11\left(7-\sqrt{5}\right)}{44} = \frac{7-\sqrt{5}}{4}$$

ÖRNEK 10: $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ kesrinin paydasını rasyonel yapınız.

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\sqrt{2}^2-1^2} = \frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1} = 3+2\sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)$$

ÖRNEK 11: $\dfrac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2}$ kesrinin paydasını rasyonel yapınız.

Çözüm:

$$\frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2} = \frac{\left(3-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}+2\right)}{\sqrt{7}^2-2^2} = \frac{3\sqrt{7}+6-7-2\sqrt{7}}{7-4} = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

$$\left(\sqrt{7}+2\right)$$

ÖRNEK 12: $\dfrac{4}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$ kesrinin paydasını rasyonel yapınız.

Çözüm:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}} = \frac{4.\left(\sqrt[3]{5}^2+\sqrt[3]{5.2}+\sqrt[3]{2}^2\right)}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right).\left(\sqrt[3]{5}^2+\sqrt[3]{5.2}+\sqrt[3]{2}^2\right)} = \frac{4.\left(\sqrt[3]{5}^2+\sqrt[3]{5.2}+\sqrt[3]{2}^2\right)}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}$$

$$\left(\sqrt[3]{5}^2+\sqrt[3]{5.2}+\sqrt[3]{2}^2\right)$$

$$= \frac{4.\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{5-2}$$

$$= \frac{4.\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{3}$$

ÖRNEK 13: $\dfrac{\sqrt{2}}{3+\sqrt[3]{4}}$ kesrinin paydasını rasyonel yapınız.

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt{2}.\left(3^2-3.\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}^2\right)}{\left(3+\sqrt[3]{4}\right).\left(3^2-3.\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}^2\right)} = \frac{\sqrt{2}.\left(9+3.\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}\right)}{3^3+\left(\sqrt[3]{4}\right)^3}$$

$$\left(3^2-3.\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}^2\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}.\left(9+3.\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}\right)}{27+4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}.\left(9+3.\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}\right)}{31}$$

SORULAR

1) $\frac{\sqrt{0,04}}{\sqrt{0,01}}+\frac{\sqrt{0,36}}{\sqrt{0,45}}-\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{45}}$ =?

2) $2\sqrt{8}+5\sqrt{72}-7\sqrt{18}-\sqrt{50}$ =?

3) $a=\sqrt[3]{2}$ $b=\sqrt[4]{3}$ $c=\sqrt[6]{5}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

4) $\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}-\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ =?

5) $\frac{3^2.9^{3x+1}}{9^x}=\left(\frac{1}{81}\right)^{-3}$ olduğuna göre x =?

6) $a<0<b$ ise $a\sqrt{b^3}+b\sqrt{a^2b}-\sqrt{a^2b^2}-b\sqrt{a^2}$ ifadesinin en sade hali nedir?

7) $\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\,.\,\sqrt[3]{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\,.\,\sqrt[6]{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^5}$ =?

8) $\sqrt{9.\sqrt{7-\sqrt{24}}.\sqrt{7+\sqrt{24}}}$ =?

9) $\frac{\sqrt[3]{27^n}}{9^{3n}}=\frac{3^n}{729}$ ise n =?

10) $\frac{2^n+2^{n+1}+2^{n+2}}{2^n+2^{n-1}+2^{n-2}}:\frac{1}{8}$ =?

11) $\frac{\left(x^a+x^b\right)\cdot\left(x^{a+1}-x^{b+1}\right)}{x^{2a-1}-x^{2b-1}}:x^3=?$

12) $(-2)^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}\cdot\left(-2^{-2}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{2^{-2}}\right)^{-2}=?$

13) a $\neq 0$ olmak üzere $2^{2a}-17.2^a+16=0$ ise a=?

14) $9^x-3^{x+1}-4=0$ ise x =?

15) $\frac{\sqrt{9^{3x-1}}}{\sqrt[3]{27^{2x+1}}}=\frac{\sqrt[3]{9^{6x-12}}}{\sqrt{3^{4-4x}}}$ ise x =?

16) $\left.\begin{aligned}(0,5)^x\cdot 4^y&=32\\(0,\overline{3})^y\cdot 9^x&=9\end{aligned}\right\}$ $x+y$ =?

17) $0,00135=3^x\cdot 2^y\cdot 5^z$ ise $x+y+z$ =?

18) $\frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{12^{n+1}+8^{n+1}}=2$ ise n =?

19) $\frac{1-81^x}{(1+9^x)\cdot(1+3^x)}=\frac{2}{3}$ ise x =?

20) $\sqrt{a:\sqrt{a:\sqrt{a:\ldots}}} = 5$ ise $a = ?$

21) $\dfrac{\sqrt[3]{36\sqrt[3]{36\sqrt[3]{36\ldots}}}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}).\sqrt{7-2\sqrt{10}}} = ?$

22) $\sqrt{14+\sqrt{180}} + \sqrt{21+\sqrt{320}} = ?$

23) $\dfrac{\sqrt[5]{81\sqrt[5]{81\sqrt[5]{81\ldots}}} + \sqrt[5]{64:\sqrt[5]{64:\sqrt[5]{\ldots}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ldots}}}} = ?$

24) $x = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$ ise $x^3 + 3x = ?$

25) $\dfrac{2.3^{x+2}+12.3^{x+1}}{5.2^{2x+1}-4^{x}} = 8$ olduğuna göre $x = ?$

26) $m - 2 = \sqrt{3}$ ise $\dfrac{\sqrt{4m^3}\,.\sqrt[4]{m^2}}{2m-4} - 4 = ?$

------------------------------------ ◈ ------------------------------------

LOGARİTMA

Tanım : $a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$ olmak üzere

$$f:\ \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = \log_a x$$

şeklinde tanımlı fonksiyona "*a tabanına göre logaritma fonksiyonu*" denir.

Şöyle de tanımlanabilir : a ve y gerçek sayılar olmak üzere

$$a^y = x$$

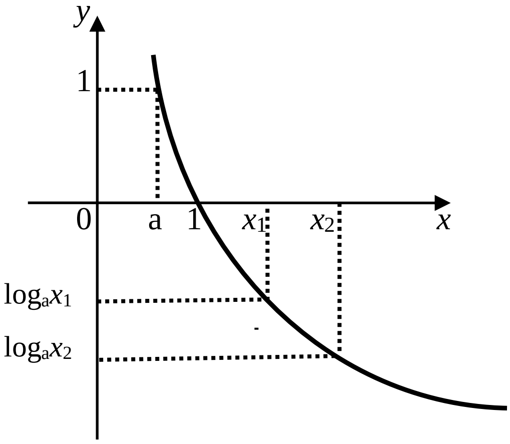
eşitliğini sağlayan **y** sayısına,***x*** sayısının **a** tabanına göre logaritması denir ve

$$y = \log_a x$$

şeklinde gösterilir.

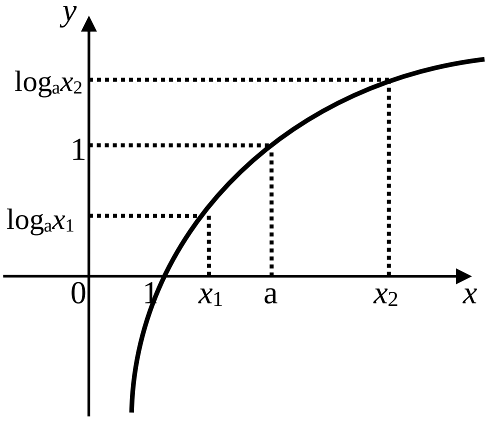
a sayısı pozitif ama 1'den farklı olduğuna göre bu fonksiyonun grafiği a'ya göre iki türlü olabilir :

<u>0< a < 1 ise:</u>



$x_1 < x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

<u>a > 1 ise:</u>



$x_1 < x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

* $a = 10$ ise logaritma fonksiyonuna "***bayağı logaritma** fonksiyonu*" denir ve $y = \log_{10} x$ yerine $y = \log x$ yazılır ($\log_{10} x = \log x$).

* $a = e$ ise logaritma fonksiyonuna "***doğal logaritma** fonksiyonu*" denir ve $y = \log_e x$ yerine $y = \ln x$ yazılır ($\log_e x = \ln x$).

Burada e sayısı, π sayısı gibi matematikteki sabitlerden biridir ve değeri $e = 2{,}71828 \ldots$ dir.

Özellikler

1) $\log_a x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = a^b$
2) $\log_a a = 1$
3) $\log_a 1 = 0$
4) $\log_a x^n = n.\log_a x$
5) $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$
6) $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
7) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
8) $\log_a x\,.\log_x y = \log_a y$
9) $a^{\log_a x} = x$
10) $\frac{\log_a x}{\log_a y} = \log_y x$

NOT: Yukarıdaki özelliklerin tümü "*ln* (doğal logaritma)" için de geçerlidir.

ÖRNEK 1: $\log_2(5a-3) = -3$ ise $a = ?$

Çözüm: $5a - 3 = 2^{-3} \Longrightarrow 5a - 3 = \frac{1}{8} \Longrightarrow 40\,a - 24 = 1$

$$\Longrightarrow 40\,a = 25$$

$$\Longrightarrow a = \frac{25}{40}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = \frac{5}{8}}$$

ÖRNEK 2: $\log\frac{26}{7} - \log\frac{15}{63} + \log\frac{5}{26} = ?$

Çözüm: $log\left(\frac{\frac{26}{7}}{\frac{15}{63}}\right) + log\frac{5}{26} = log\left(\frac{26}{7}\cdot\frac{63}{15}\cdot\frac{5}{26}\right) = \boxed{log\,3}$

ÖRNEK 3: $\log_7 49 + \log_4 512 + \log_2 4 = \ ?$

Çözüm: $\log_7 7^2 + \log_{2^2} 2^9 + \log_2 2^2 = 2.\underbrace{\log_7 7}_{1} + \frac{9}{2} \cdot \underbrace{\log_2 2}_{1} + 2.\underbrace{\log_2 2}_{1}$

$$= 2 + \frac{9}{2} + 2 = \boxed{\frac{17}{2}}$$

ÖRNEK 4: $\log_2 x = 6$ *ise* $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = ?$

Çözüm: $\log_2 x + \log_{2^2} x + \log_{2^3} x = \underbrace{\log_2 x}_{6} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\log_2 x}_{6} + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\log_2 x}_{6}$

$$= 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 6 = 6 + 3 + 2 = \boxed{11}$$

ÖRNEK 5: $f(x) = log_2 x$ ise $f\left(\frac{2}{x}\right) + f(x) = ?$

Çözüm: $f\left(\frac{2}{x}\right) + f(x) = log_2\left(\frac{2}{x}\right) + log_2 x = \underbrace{\log_2 2}_{1} - \cancel{\log_2 x} + \cancel{\log_2 x} = \boxed{1}$

ÖRNEK 6: $f(x,y) = \frac{log\,x}{log\,y} \Rightarrow f(4,2) = ?$

Çözüm: $f(4,2) = \frac{log\,4}{log\,2} = \frac{log\,2^2}{\cancel{log\,2}} = \frac{\cancel{2}log\,2}{log\,2} = \boxed{2}$

ÖRNEK 7: $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: Logaritma fonksiyonunun tanımından $f : R^+ \to R$ olduğuna göre $x^2 - x - 6 > 0$ eşitsizliğinin çözüm aralığı sorumuzun cevabı olacaktır.

$x^2 - x - 6 > 0$

2 $\quad -3$

$(x+2)(x-3)$

$x_1 = -2 \quad x_2 = 3$

	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$	$+$		$-$	$+$

Tanım aralığı: $\boxed{(-\infty, 2) \cup (3, \infty)}$

ÖRNEK 8: $ln(x-2) - ln(x+1) = -\,ln\,2$ ise $x = ?$

Çözüm: $\underbrace{ln(x-2) - ln(x+1)} = -\,ln\,2$

$$ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = ln\,2^{-1}$$

$$ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = ln\frac{1}{2}$$

$$\frac{x-2}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$2x - 4 = x + 1 \implies \boxed{x = 5}$$

ÖRNEK 9: $ln(e^{lna}) = 2\,ln\,b + ln\,3$ ise$a = ?$

Çözüm: $ln\,\underbrace{(e^{lna})}_{a} = ln\,b^2 + ln\,3$

$ln\,a = ln\,3b^2$

$\boxed{a = 3b^2}$

ÖRNEK 10: $\log_x 3 + \log_x 9 + \log_x 27 + \log_x 81 = 5$ ise$x = ?$

Çözüm: $\log_x 3 + \log_x 3^2 + \log_x 3^3 + \log_x 3^4 = 5$

$\log_x 3 + 2.\log_x 3 + 3.\log_x 3 + 4.\log_x 3 = 5$

$\log_x 3\,(1 + 2 + 3 + 4) = 5$

$10.\log_x 3 = 5$

$\log_x 3 = \frac{5}{10}$

$\log_x 3 = \frac{1}{2} \implies x^{\frac{1}{2}} = 3 \implies \sqrt{x} = 3 \implies \boxed{x = 9}$

ÖRNEK 11: $9^x + 3^{x+2} - 22 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $(3^x)^2 + 3^x.3^2 - 22 = 0 3^x = a$ olsun. Bu durumda denklem,

$a^2 + 9a - 22 = 0$ şeklini alır. Bu denklemin kökleri hesaplandığında

$a_1 = -11$ ve $a_2 = 2$ olarak bulunur.

1.durum: $a = -11 \implies 3^x = -11 \implies$ *çözüm* $= \varnothing$

(negatif logaritma olamaz)

2.durum: $a = 2 \implies 3^x = 2 \implies \log 3^x = \log 2$

$\implies x \log 3 = \log 2$

$\implies x = \frac{\log 2}{\log 3}$

$\implies \boxed{x = \log_3 2}$

ÖRNEK 12: $3\log\sqrt{b} - \log c^2 - 3\log\sqrt[4]{b} + 5\log\sqrt{c}$ ifadesinin en kısa halini yazınız.

Çözüm: $3\log b^{\frac{1}{2}} - 2\log c + 3\log b^{\frac{1}{4}} + 5\log c^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{3}{2}\log b - 2.\log c - \frac{3}{4}\log b + \frac{5}{2}\log c$$

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)\log b + \left(\frac{5}{2} - 2\right)\log c$$

$$\frac{3}{4}\log b + \frac{1}{2}\log c \Longrightarrow \log b^{\frac{3}{4}} + \log c^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \log\sqrt[4]{b^3} + \log\sqrt{c}$$

$$\Longrightarrow \log\left(\sqrt[4]{b^3}.\log\sqrt[4]{c^2}\right) \Longrightarrow \boxed{\log\left(\sqrt[4]{b^3c^2}\right)}$$

ÖRNEK 13: $\log 2 \cong 0{,}30103$ olduğuna göre $\log 40 + \log(0{,}5) = ?$

Çözüm: $\log 40 + \log(0{,}5) = \log(10.4) + \log\left(\frac{1}{2}\right)$

$$= \overbrace{\log 10 + \log 4} + \overbrace{\log 1 - \log 2}$$

$$= \underbrace{\log 10}_{1} + \log 2^2 + \underbrace{\log 1}_{0} - \log 2$$

$$= 1 + 2.\log 2 - \log 2$$

$$= 1 + \log 2$$

$$= 1 + 0{,}30103$$

$$= \boxed{1{,}30103}$$

ÖRNEK 14: $\log_3 a = b$ ise $\log_a 3 + \log_9 a$ ifadesinin değeri nedir?

Çözüm: $\log_3 a = b \Longrightarrow a = 3^b$

$$\log_a 3 + \log_9 a = \log_{3^b} 3 + \log_9 3^b$$

$$= \frac{1}{b}\log_3 3 + b.\log_{3^2} 3$$

$$= \frac{1}{b}\underbrace{\log_3 3}_{1} + b.\frac{1}{2}\underbrace{\log_3 3}_{1}$$

$$= \frac{1}{b} + \frac{b}{2}$$

$$\boxed{= \frac{2+b^2}{2b}}$$

ÖRNEK 15: $\log 2 = a$ ve $\log 5 = b$ ise $\log 800$' ün a ve b türünden değeri nedir?

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\log 800 = \log(8.100) &= \log 8 + \log 100 \\
&= \log 2^3 + \log 10^2 \\
&= 3.\log 2 + 2.\log 10 \\
&= 3.\log 2 + 2.\log(2.5) \\
&= 3.\underbrace{\log 2}_{a} + 2.\left(\underbrace{\log 2}_{a} + \underbrace{\log 5}_{b}\right) \\
&= 3a + 2(a+b) = 3a + 2a + 2b = \boxed{5a + 2b}
\end{aligned}$$

Karakteristik ve mantis: k$\in \mathbb{Z}$ ve m$\in[0,1)$ olmak üzere herhangi bir a sayısı için

$$\log a = k + m$$

İfadesinde k'ya logaritmanın *karakteristiği, m'*ye logaritmanın *mantisi* denir. Başka bir deyişle bir sayının 10 tabanındaki logaritmasının tam kısmına "*karakteristik*", ondalık kısmına ise "*mantis*" denir.

Örneğin; $\log a = 4{,}265$ sayısının karakteristiği 4, mantisi 0,256 dır.

- 1'den büyük bir sayının logaritmasında karakteristik, logaritması alınan sayının tam kısmındaki rakam sayısının bir eksiğidir (Örnek 16'yı inceleyiniz).
- $0 < a < 1$aralığındaki sayıların logaritmasında karakteristik, virgüldensonraki sıfırdan farklı olan ilk rakama kadarki sıfır sayısının negatifi kadardır. (Örnek 17'yi inceleyiniz).
- Mantis negatif olamaz. Bu nedenle logaritma değeri negatifse +1 ve -1 eklenerek mantis bulunur (Örnek 18'i inceleyiniz).

ÖRNEK 16: $\log 76{,}34 = 1,\ldots \qquad k = 1$

$\log 375 = 2,\ldots \qquad k = 2$

$\log 2872{,}5 = 3,\ldots \qquad k = 3$

ÖRNEK 17: $\log 0{,}054 = -2,\ldots \quad k = -1$

$\log 0{,}000306 = -3,\ldots k = -3$

ÖRNEK 18: $\log a = -4{,}1512$ sayısı için karakteristik ve mantis nedir?

$$\log a = -4 - 0{,}1512 + 1 - 1$$

$$\log a = (-4 - 1) + (1 - 0{,}1512)$$

$$\log a = -5 + 0{,}8488 = \bar{5}, 8488$$

$$k = -5 \qquad m = 0{,}8488$$

Kologaritma: $x \in \mathbb{R}^+$ sayısının çarpma işlemine göre tersinin logaritmasına x sayısının *kologaritması* denir.

$$colog_a\, x = \log_a \frac{1}{x} = \log_a x^{-1} = -\log_a x$$

ÖRNEK 19: $colog\ 1000 = ?$

$$colog\ 1000 = -\log 1000 = -\log 10^3 = -3.\underbrace{\log 10}_{1} = -3$$

ÖRNEK 20: $colog\ x = 2{,}712$ ise $\log \sqrt{x^3} = ?$

$$colog\ x = 2{,}712 \quad \Rightarrow \log x = -2{,}712$$

$$\log \sqrt{x^3} = \log x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log x = \frac{3}{2}(-2{,}712)$$

$$= -4{,}068$$

$$= -4 - 0{,}068 + 1 - 1$$

$$= (-4 - 1) + (1 - 0{,}068)$$

$$= -5 + 0{,}932$$

$$= \bar{5}, 932$$

SORULAR

1) $\dfrac{\log_3 256}{x-2} = \dfrac{x+2}{\log_2 81}$ olduğuna göre x'in pozitif değeri kaçtır?

2) $\log 20 = \mathrm{x} + 3$ olduğuna göre $\log_2 5$ ifadesinin x türünden eşiti nedir?

3) $\log_2(26 - 5^x) = 10^{\log(x+2)}$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

4) $\log_{25} 3 \,.\log_9 4 \,.\log_8 5 = x$ olduğuna göre $\log_{36} x$ =?

5) $\log_2\left(x^2 - 5x + 6\right) = 1$ denklemine göre$x$ =?

6) $f(x, y) = \dfrac{\log y}{\log x}$ *ise* $f(4,2) - f(2,8) + f(8,4)$ = ?

7) $f(x, y) = \dfrac{2+\log\frac{x^2}{y^2}}{\log x.\log y}$ olduğuna göre $f(20,10)$ =?

8) $\log_5 7 = \dfrac{1}{a}$ ve $\log_7 3 = b$ ise $\log_{25} 63$ ifadesinin *a* ve *b* türünden eşiti nedir?

9) $\log_2 \sqrt[3]{5} \,.\log_3 8 \,.\log_5 \sqrt{3}$ =?

10) $\log_4(x+3)^2 + \log_{\frac{1}{2}}(x-3) = 2$ denklemini sağlayan x =?

11) $\dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_2 x} = -2$ ise x =?

12) $\dfrac{\log_x(x+1)}{\log_x 2} + \dfrac{\log_3 x}{\log_3 2} = \dfrac{1}{\log_{20} 2}$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

13) $y = ln(x^2 - 2x - 3)$ fonksiyonunun tanım aralığını bulunuz.

14) $y = \log(-x^2 + 5x + 6)$ fonksiyonunun tanım aralığını bulunuz.

15) $f(x) = \sqrt{2 - \log_3(x-5)}$ fonksiyonunun tanım aralığını bulunuz.

16) $2.\log_{\sqrt[3]{2}} 16 = 4^{x+2}$ ise x =?

17) $\log_2 x = 6$ ise $\log_2 x + \log_4\left(\dfrac{x}{2}\right) - \log_8(4x) + \log_{16}(2x) - \log_{32} x$ =?

18) $\left(\dfrac{125}{8}\right)^{x-1} .\log 32 = \dfrac{\log 4}{(0{,}16)^{2x}}$ denklemine göre x =?

19) $f(x) = 3^{x-2} + 1$ fonksiyonunun tersini bulunuz ($f^{-1}(x)$ =?).

20) $\log x = 2{,}724$ *ise* $colog\, x$ =?

21) $colog\, x = \bar{2}, 27$ *ise* $\log x$ =?

22) $\log a = \bar{2}, 1978$ *ise* $\log \sqrt{x}$ =?

23) $\log a = \bar{2}, 986$ *ise* $\log a^7$ =?

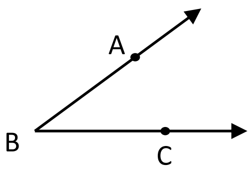
----------------------------------- ◈ -----------------------------------

TRİGONOMETRİ

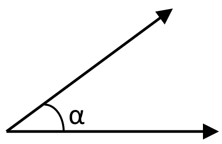
Trigonometri tri (üç),gonon (kenar) ve metry (ölçüm) kelimelerinin birleşiminden oluşmuş bir matematik terimidir. Bu bölümde temel açı birimleri hakkında biraz bilgi verdikten sonra, trigonometrik oranlar ve bunlara bağlı olarak, üçgen üzerinde çözümler, temel açıların trigonometrik değerleri, birim çember, bazı trigonometrik formüller ve ters trigonometrik fonksiyonlara değineceğiz. Tüm bunlar açı temeline dayandığı için öncelikle açı bilgisi ile başlayacağız.

Açı: Birbirini kesen iki doğru arasında kalan açıklığa "*açı*" denir.

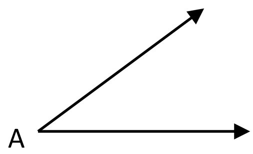
Açı gösterimleri üç şekilde olabilir:



$\mathbf{A\hat{B}C}$



α

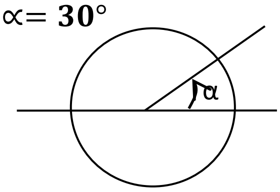


$\mathbf{\hat{A}}$

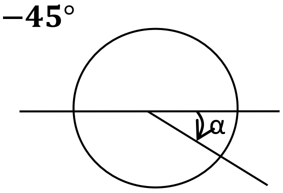
Yönlü açı: Saat yelkovanının dönme yönünün tersi pozitif (+) yönlü açı

Saat yelkovanının dönme yönü negatif (-) yönlü açı

Örneğin; $\propto = \mathbf{30°}$



$\propto = \mathbf{-45°}$



Açı Ölçü Birimleri

1. **Derece**: Bir çember çevresinin 360 eşit parçasından birini gören merkez açının ölçüsüne *"1derecelik açı"* denir (yani bir tam devir 360 derecedir)
   1° = 60' (1 derece = 60 dakika)
   1' = 60" (1 dakika = 60 saniye)
   1° = 3600" (1 derece = 3600 saniye)
2. **Grad**: Bir çember çevresinin 400 eşit parçasından birini gören merkez açın ölçüsüne *"1 gradlık açı"*denir (yani bir tam devir 400 graddır)(Gradyan da denir).

3. **Radyan**: Bir çemberde yarıçap uzunluğundaki yayı gören merkez açının ölçüsüne *“1 radyanlık açı”* denir (yani bir tam devir $2\boldsymbol{\pi}$ radyandır, $\boldsymbol{\pi = 180°}$).
4. **Milyem:** Bir çember çevresinin 6400 eşit yay parçasından birini gören merkez açıya “bir milyemlik açı” denir. 6400 rakamı yerküresi yarıçapına (yaklaşık 6370 km) çok yakın yuvarlak bir rakamdır. Yeryüzünde 1 km’lik mesafe için, 1 Milyemlik açıya yaklaşık olarak 1m’lik yay uzunluğu karşılık gelmektedir. Bu da askeri amaçlı ölçmelerde büyük kolaylık sağlamaktadır. Bu açı ölçü birimi genellikle radar sistemleri gibi askeri gayelerle kullanıldığından burada sadece sizlere bilgi olması amacıyla tanıtılmıştır.

Açı ölçü birimleri aşağıdaki eşitliklerle birbirine dönüştürülebilir:

$$\boxed{\frac{D}{360} = \frac{G}{400} = \frac{R}{2\pi}} \text{ veya } \boxed{\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}}$$

ÖRNEK1: $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$ radyan **a)** Kaç derecedir? **b)** Kaç graddır?

Çözüm: **a)** $\dfrac{D}{180} = \dfrac{R}{\pi} \Rightarrow \dfrac{D}{180} = \dfrac{\frac{5\pi}{6}}{\pi}$

$$\Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow D = \frac{180.5}{6} = 150°$$

b) $\dfrac{R}{\pi} = \dfrac{G}{200} \Rightarrow \dfrac{\frac{5\pi}{6}}{\pi} = \dfrac{G}{200}$

$$\Rightarrow \frac{5}{6} = -\frac{G}{200}$$

$$\Rightarrow G = \frac{200.5}{6} = \frac{500}{3} \cong 166{,}7 \text{ grad}$$

Sonuç : $\alpha = \dfrac{5\pi}{6} = 150° \cong 166{,}7$ grad

ÖRNEK 2: $\boldsymbol{\alpha = 72°}$ **a)** Kaç radyandır? **b)** Kaç graddır?

a) $\dfrac{72°}{180} = \dfrac{R}{\pi} \Rightarrow R = \dfrac{72\pi}{180} = \dfrac{2\pi}{5}$

b) $\dfrac{72}{180} = \dfrac{G}{200} \qquad \Rightarrow \qquad G = \dfrac{72.200}{180} = 80\,\text{grad}$

Sonuç : $\alpha = 72° = 80$ Grad = $\dfrac{2\pi}{5}$ radyan

ÖRNEK 3: $\beta = 100$ Grad **a)** Kaç derecedir? **b)** Kaç radyandır?

a) $\dfrac{D}{180} = \dfrac{100}{200} \quad \Rightarrow \quad D = 90°$

b) $\dfrac{R}{\pi} = \dfrac{100}{200} \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{\pi}{2}$

Sonuç: $\beta = 90° = 100$ Grad = $\dfrac{\pi}{2}$

Esas ölçü:

a) $k \in \mathbb{Z}^{+}$, $\alpha > 360°$ ve $0° \leq \beta < 360°$ olmak üzere;

$$\alpha = k\,.360° + \beta$$

ise β açısına α açısının "esas ölçüsü" denir.

b) $k \in \mathbb{Z}^{+}$, $\alpha > 2\pi$ ve $0 \leq \beta < 2\pi$ olmak üzere

$$\alpha = k\,.2\pi + \beta$$

ise β açısına α açısının "esas ölçüsü" denir.

ÖRNEK 4: 1256°nin esas ölçüsü nedir?

1256 = 3.360° + 176°

1256'nın esas ölçüsü 176°dir.

ÖRNEK 5: 860°nin esas ölçüsü nedir?

860 = 2. 360 + 140

860°nin esas ölçüsü 140°dir.

ÖRNEK 6: $\alpha = \dfrac{27\pi}{5}$ açısının esas ölçüsü nedir?

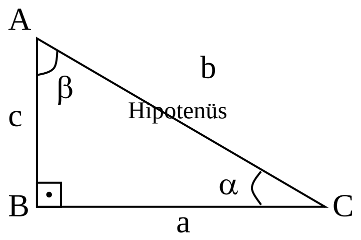
$\alpha = 2.2\pi + \dfrac{7\pi}{5} = 4\pi + \dfrac{7\pi}{5} \quad \Rightarrow$ esas ölçü $\dfrac{7\pi}{5}$

ÖRNEK 7: $\alpha = \dfrac{20\pi}{3}$ açısının esas ölçüsü nedir?

$$\alpha = \frac{20\pi}{3} = 6\pi + \frac{2\pi}{3} = 3.2\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \text{esas ölçü } \frac{2\pi}{3}$$

II. yol: Verilen radyan değeri önce dereceye çevrilip, a şıkkına göre de yapılabilir.Ancak sonuç derece cinsinden bulunacağından, tekrar radyana çevirmek gerekir.

Dik Üçgende Trigonometrik Oranlar



$$\sin\alpha = \frac{\text{karşıdik kenar}}{\text{hipotenüs}} = \frac{c}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{komşudik kenar}}{\text{hipotenüs}} = \frac{a}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{karşıdik kenar}}{\text{komşudik kenar}} = \frac{c}{a}$$

$\alpha + \beta = 90°$

$$\cot\alpha = \frac{\text{komşudik kenar}}{\text{karşıdik kenar}} = \frac{a}{c}$$

Bu dört temel trigonometrik oran dışında aşağıdaki oranlar da bilinmelidir.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad cosec\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

* Yukarıdaki α için yazılan oranlar β için de yazılırsa aşağıdaki eşitliklerin olduğu görülür:

$\sin\alpha = \cos\beta$ $\quad$ $\tan\alpha = \cot\beta$ $\quad$ $\sec\alpha = cosec\beta$

$\cos\alpha = \sin\beta$ $\quad$ $\cot\alpha = \tan\beta$ $\quad$ $cosec\alpha = \sec\beta$

$\alpha + \beta = 90°$ olduğuna göre buradan aşağıdaki önemli sonucu yazabiliriz.

Sonuç: Toplamları 90° olan iki açıdan birinin sinüsü diğerinin kosinüsüne eşittir.

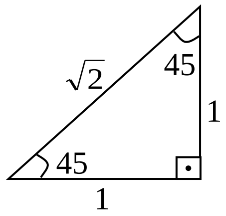
(*tan-cot, sec-cosec* ikilileri için de geçerlidir)

Örneğin; $\quad \sin 15 = \cos 75 \qquad \cos 60 = \sin 30$

$\tan 38 = \cot 52 \qquad \cot 45 = \tan 45$

⋮

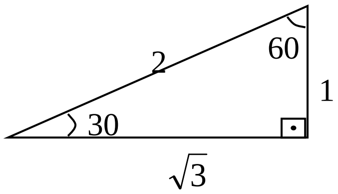
- **45 – 90 – 45 üçgeni:**



$$sin\ 45 = cos\ 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tan\ 45 = cot\ 45 = 1$$

- **30 – 60 – 90 üçgeni:**



30°nin karşısı hipotenüsün yarısı uzunluğundadır.

60°nin karşısı hipotenüsün yarısının $\sqrt{3}$ katıdır.

$$sin30 = \frac{1}{2} \qquad sin\ 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60 = \frac{1}{2}$$

$$tan\ 30 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad tan\ 60 = \sqrt{3}$$

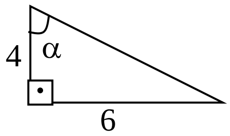
$$cot\ 30 = \sqrt{3} \qquad cot\ 60 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Not: Trigonometride temel açılar dediğimiz bazı açıların trigonometrik değerlerini bilmekte yarar vardır. Bu değerleri yukarıdaki özel üçgenler yardımıyla elde edebileceğimiz gibi aşağıdaki tablodan da yararlanabiliriz. Açıların derece ve radyan karşılıklarını da aşağıda bulabilirsiniz.

Özel Açıların Trigonometrik Oranları:

Radyan →	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Derece →	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tanα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	tanımsız	0
cotα	tanımsız	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	tanımsız

Derece →	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**
Radyan →	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

ÖRNEK 8: 

Yandaki dik üçgene göre $sin\alpha, cos\alpha, tan\alpha, sec\alpha, cosec\alpha$ değerlerini bulunuz.

hipotenüs x olsun:

$x^2 = 4^2 + 6^2$

$x^2 = 16 + 36$

$x^2 = 52$

$x = \sqrt{52}$

$x = 2\sqrt{13}$

$$sin\alpha = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$cos\alpha = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

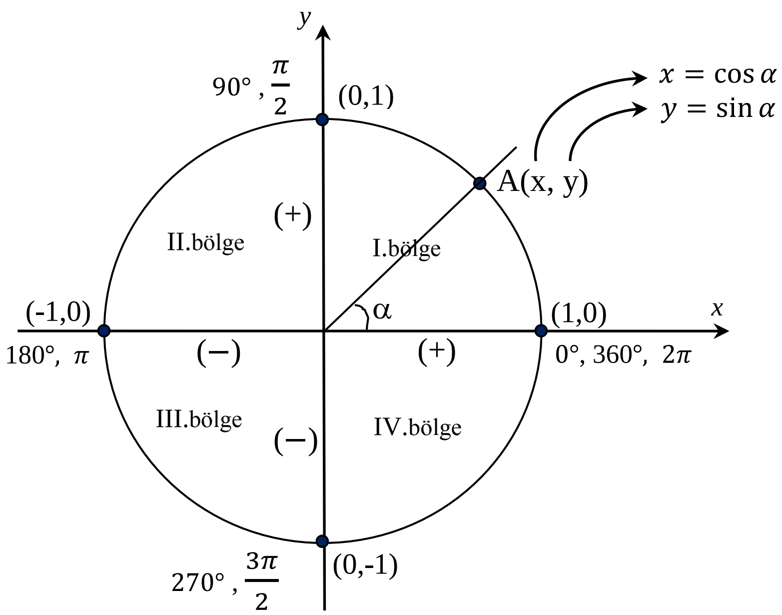
$$tan\alpha = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \qquad cot\alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$cosec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

Birim Çember

Tanım: Merkezi orijin ve yarıçapı 1 birim olan çembere *"birim çember"* veya *"trigonometrik çember"* denir.Trigonometrik çemberin denklemi: $x^2 + y^2 = 1$ dir.



Birim çemberin denkleminin $x^2 + y^2 = 1$ olduğunu belirtmiştik. Yukarıda $x = \cos\alpha$ ve $y = \sin\alpha$ olduğunu da görüyoruz. Dolayısı ile $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ elde edilir ki bu da trigonometrinin temel özdeşliğidir.

Bölgelere göre işaret değişimi:

	sinα	cosα	tanα	cotα
I. bölge	+	+	+	+
II. bölge	+	-	-	-
III. bölge	-	-	+	+
IV. bölge	-	+	-	-

ÖRNEK 9: Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

$\sin\frac{7\pi}{2} = -1$ $\qquad$ $\cos\frac{17\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ (2. bölge)

$\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3. bölge) $\qquad$ $\cot\frac{11\pi}{6} = -\sqrt{3}$ (4. bölge)

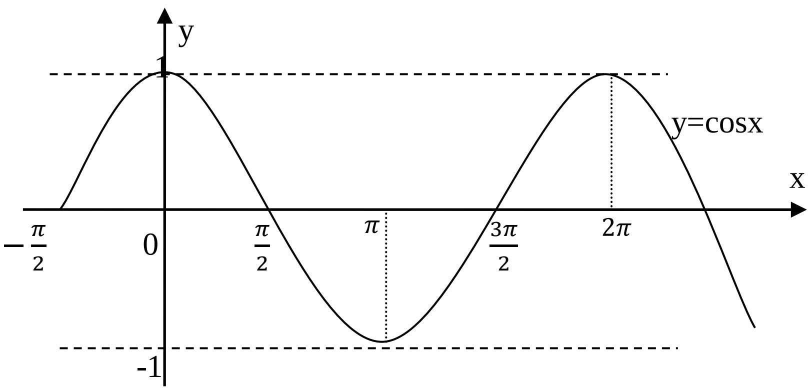
$\cos\frac{11\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (4. bölge) $\qquad$ $\cot\frac{13\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (1. bölge)

$\tan\frac{9\pi}{4} = 1$ (1. bölge) $\qquad$ $\tan\frac{10\pi}{3} = \sqrt{3}$ (3. bölge)

Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

1) $y = \cos x$ fonksiyonunun grafiği:

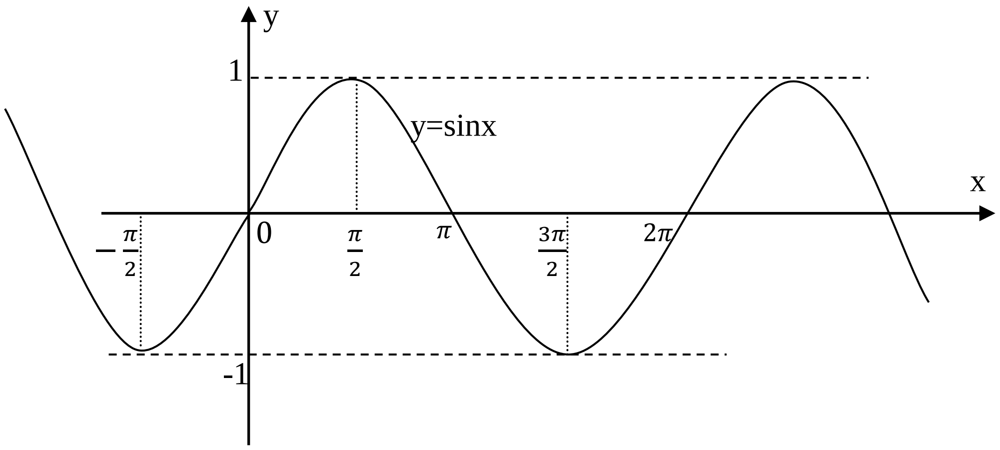
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos x$	1	0	-1	0	1



$y = \cos x$ fonksiyonunun periyodu 2π dir ($T = 2\pi$). Yani her 2π aralıkta bir grafik tekrar eder.

2) $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiği

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x$	0	1	0	-1	0

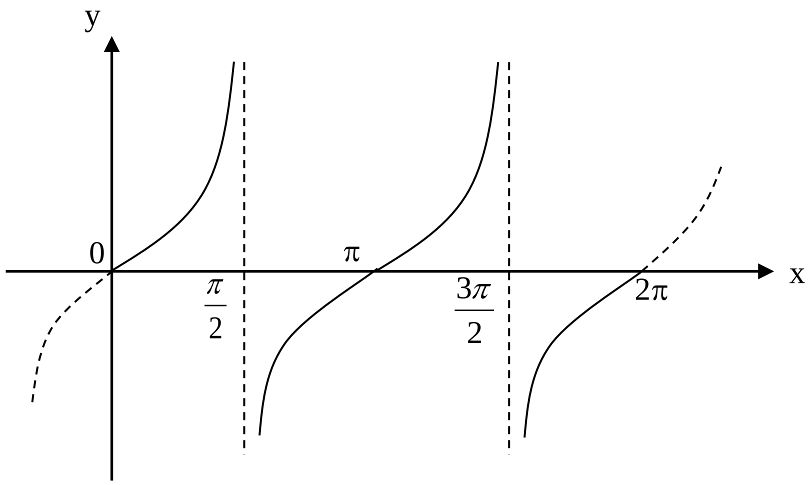


$y = sinx$ fonksiyonunun periyodu 2π dir.

3) $y = \tan x$ fonksiyonunun grafiği:

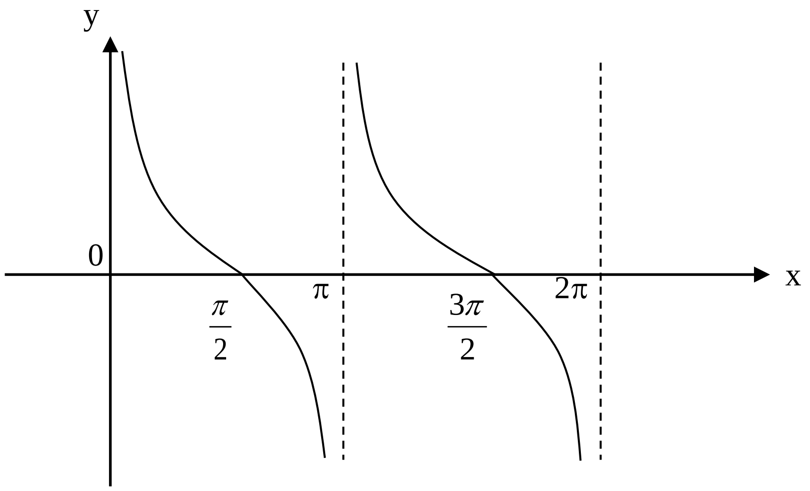
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \tan x$	0	Tanımsız (grafikte sonsuza gider)	0	Tanımsız (grafikte sonsuza gider)	0

$y = tan\ x$ fonksiyonunun periyodu π dir.(yani her π mesafede bir grafik tekrar eder)



4) $\mathbf{y = \cot x}$ fonksiyonunun grafiği:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cot x$	Tanımsız (grafikte sonsuza gider)	0	Tanımsız (grafikte sonsuza gider)	0	Tanımsız (grafikte sonsuza gider)



Trigonometrik Özdeşlikler

a) Toplam ve Fark Formüller:

$$sin(a+b) = sin\,a\,.\,cos\,b + cos\,a\,.\,sin\,b$$

$$sin(a-b) = sin\,a\,.\,cos\,b - cos\,a\,.\,sin\,b$$

$$cos(a+b) = cos\,a\,.\,cos\,b - sin\,a\,.\,sin\,b$$

$$cos(a-b) = cos\,a\,.\,cos\,b + sin\,a\,.\,sin\,b$$

$$tan(a+b) = \frac{tan\,a + tan\,b}{1 - tan\,a\,.\,tan\,b} \qquad tan(a-b) = \frac{tan\,a - tan\,b}{1 + tan\,a\,.\,tan\,b}$$

$$NOT:\;\; cot(a \mp b) = \frac{1}{tan(a \mp b)}$$

b) Yarım Açı Formülleri:

$$sin\,2a = 2\,sin\,a\,.\,cos\,a \qquad tan\,2a = \frac{2\,tan\,a}{1 - tan^2\,a}$$

$$cos\,2a = cos^2 a - sin^2 a \qquad cot\,2a = \frac{cot^2\,a - 1}{2\,cot\,a}$$

$$= 2cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2sin^2 a$$

c) Dönüşüm Formülleri:

$$sin\,a \;+\; sin\,b \;=\; 2.sin\frac{a+b}{2}\,.cos\frac{a-b}{2}$$

$$sin\,a \;-\; sin\,b \;=\; 2.sin\,\frac{a-b}{2}\,.cos\,\frac{a+b}{2}$$

$$cos\,a \;+\; cos\,b \;=\; 2.cos\,\frac{a+b}{2}\,.cos\,\frac{a-b}{2}$$

$$cos\,a \;-\; cos\,b \;=\; -2.sin\,\frac{a+b}{2}.sin\,\frac{a-b}{2}$$

d) Ters Dönüşüm Formülleri:

$$sin\,a.cos\,b \;=\frac{1}{2}[sin(a+b)+sin(a-b)]$$

$$cos\,a\,.cos\,b \;=\frac{1}{2}[cos(a+b)+cos(a-b)]$$

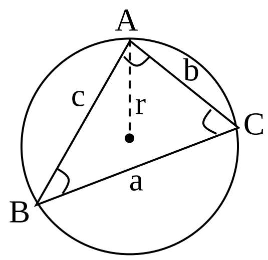
$$sin\,a\,.sin\,b=\frac{-1}{2}[cos(a+b)-cos(a-b)]$$

$$cos\,a\,.sin\,b=\frac{1}{2}[sin(a+b)-sin(a-b)]$$

Üçgende Sinüs, Kosinüs, Alan Teoremleri

a) Sinüs Teoremi: Herhangi bir $\widehat{ABC}$ üçgeninde, kenar uzunlukları ile bu kenarların karşısındaki açıların sinüs değerleri orantılıdır. Orantı sabiti $\widehat{ABC}$ üçgeninin çevrel çemberinin çapına eşittir.

$$\boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2r=R}$$

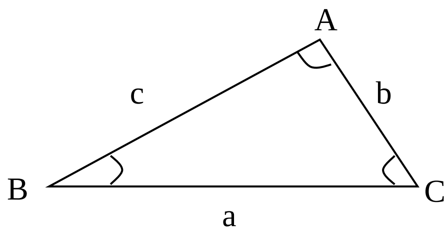


b) Kosinüs Teoremi:

Herhangi bir $\widehat{ABC}$'de aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2+c^2-2bc.cos\,\hat{A} \\ b^2 = a^2+c^2-2ac.cos\,\hat{B} \\ c^2 = a^2+b^2-2ab.cos\,\hat{C} \end{array}}$$

$\hat{C}$



c) Alan Teoremi:

Herhangi bir $\widehat{ABC}$ ’de herhangi iki kenar ve bu kenarlar arasındaki açı biliniyorsa alan şu formüllerden biri ile hesaplanabilir:

$$A(ABC) = \frac{a.b.\sin \hat{C}}{2}$$

$$A(ABC) = \frac{a.c.\sin \hat{B}}{2}$$

$$A(ABC) = \frac{b.c.\sin \hat{A}}{2}$$

Ek bir bilgi olarak, $\widehat{ABC}$ ’nin çevresini $2u$ ile gösterirsek;

$a + b + c \ = \ 2u$ olur ve $\widehat{ABC}$ nin alanı şu şekilde de hesaplanabilir:

$$A(ABC) = \sqrt{u.(u-a).(u-b).(u-c)}$$

Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

a) Sinüs fonksiyonu: $f\!: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ $\quad y = f(x) = \sin x$

Ters sinüs fonksiyonu: $f^{-1}\!: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad f^{-1}(x) = \sin^{-1} x = Arcsin\, x$

b) Kosinüs fonksiyonu: $f\!: [0, \pi] \to [-1,1]$ $\quad y = f(x) = \cos x$

Ters kosinüs fonksiyonu: $f^{-1}\!: [-1,1] \to [0, \pi]$ $\quad f^{-1}(x) = \cos^{-1} x = Arccos\, x$

c) Tanjant fonksiyonu: $f\!: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathrm{R}$ $\quad y = f(x) = \tan x$

Ters tanjant fonksiyonu: $f^{-1}\!: R \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad f^{-1}(x) = \tan^{-1} x = Arctan\, x$

d) Kotanjant fonksiyonu: $f\!: [0, \pi] \to R$ $\quad y = f(x) = \cot x$

Ters kotanjant fonksiyonu: $f^{-1}\!: R \to [0, \pi]$ $\quad f^{-1}(x) = \cot^{-1} x = Arccot\, x$

Sonuç olarak;

$$Arcsin\, a = b \;\Rightarrow\; a = sin\, b \qquad Arctan\, a = b \;\Rightarrow\; a = tan\, b$$

$$Arccos\, a = b \;\Rightarrow\; a = cos\, b \qquad Arccot\, a = b \;\Rightarrow\; a = cot\, b$$

ÖRNEK 10: $sin15$, $cos105$, $tan75$ değerlerini hesap makinesi kullanmadan hesaplayınız.

Çözüm:

- *sin (a-b) = sina . cosb – cosa . sinb*

$sin\ 15 = sin\ (60-45) = sin\ 60\ .\ cos\ 45 - cos\ 60\ .\ sin\ 45$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

- *cos*(a+b)= *cosa . cosb – sina . sinb*

$cos105 = cos\ (60+45) = cos60\ .\ cos45 - sin60\ .\ sin45$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$$

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$

$$\tan 75 = \tan(30+45) = \frac{\tan 30 + \tan 45}{1 - \tan 30 \cdot \tan 45} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}+3}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{\underset{(3+\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}}} = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}$$

ÖRNEK 11: $cos2x = sin3x$ eşitliğini sağlayan x dar açısını bulunuz.

Çözüm: $cos2x = sin3x \implies 2x + 3x = 90°$olmalı

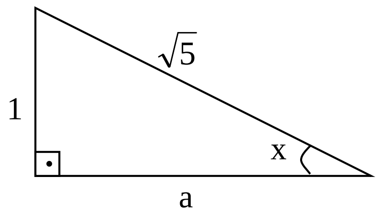
$$5x = 90°$$

$$x = 18°$$

ÖRNEK 12: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ve $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ olduğuna göre $\frac{\tan x - \cot x}{\sin x} = ?$

Çözüm:

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e uygun bir dik üçgen çizelim:



$a^2 = \sqrt{5}^2 - 1^2 \Rightarrow \quad a = 2$

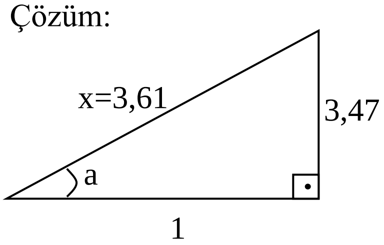
$x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ olduğundan x açısı 4. bölgedir. Bu durumda:

$tanx = -2, \quad cotx = \frac{-1}{2}, \quad sinx = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ olup, bu değerleri yerine yazdığımızda

$$\frac{\tan\alpha - \cot \mathrm{x}}{\sin} = \frac{-2+\frac{1}{2}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{-3}{2}\cdot\frac{-\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$$ bulunur.

ÖRNEK 13: tan a = 3,47 ise$3sina – 2cosa + cota + 17tana = ?$

Çözüm:



x^2 = 3,472+12

x^2 = 13,0409

x≅ 3,61

sin a = $\frac{3,47}{3,61} \cong 0,96$

cos a = $\frac{1}{3,61} \cong 0,28$

tan a = 3,47 olduğuna göre cot a = $\frac{1}{\tan a} = \frac{1}{3,47} = 0,288...... \cong 0,29$

Şimdi bulduğumuz değerleri soruda yerine yazarak isteneni hesaplayalım:

$3.\sin a - 2.\cos a + \cot a + 17.\tan a = A$ olsun.

$A = 3.096 - 2.0,28 + 0,29 + 17.3,47$

$A = 2,88 - 0,56 + 0,29 + 58,99$

$A = 61,6$

ÖRNEK 14: $3sin^2x - cos^2x = 1$ eşitliğini sağlayan x dar açısını bulunuz.

Çözüm: $sin^2x + cos^2x = 1 \Rightarrow sin^2x = 1 - cos^2x$ olduğunu kullanacağız.

$3\,sin^2x - cos^2x = 1$

$3\,.\,(1 - cos^2x) - cos^2x = 1$

$3 - 3cos^2x - cos^2x - 1 = 0$

$-4\,cos^2x = -2$

$cos^2x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow cos\,x = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$

(dar açı istendiği için pozitif olan kökü alıyoruz)

$cosx = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 45°$

ÖRNEK 15: $sin(x+45) = 2\,.\,cos\,(x + 45)$ ise $tanx = ?$

Çözüm:

$$\frac{\sin(x+45)}{\cos(x+45)} = 2 \Rightarrow \tan(x+45) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x + \tan 45}{1 - \tan x.\tan 45} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} = 2$$

$$\Rightarrow \tan x + 1 = 2 - 2\tan x$$

$$\Rightarrow 3\tan x = 1$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{1}{3}$$

ÖRNEK 16: $sin\,x.tan\,x = sinx + tan\,x - 1$ eşitliğini sağlayan x açısını bulunuz. $(0 < x \leq 90°)$.

Çözüm: $sin\,x.tan\,x = sinx + tan\,x - 1$

$sin\,x.tan\,x - sinx - tan\,x + 1 = 0$

$sin\,x\,(tan\,x - 1) - (tan\,x - 1) = 0$

$(tan\,x - 1).(sin\,x - 1) = 0$

$tan\,x - 1 = 0 \quad \vee \quad sin\,x - 1 = 0$

$tan\,x = 1 \quad \vee \quad sin\,x = 1$

$tan\,x = 1 \quad \vee \quad sin\,x = 1$

$x = 45° \quad \vee \quad x = 90°$

ÖRNEK 17: $\frac{1}{\sin 18} - \frac{1}{\sin 54} = ?$ $\left(\sin a - \sin b = 2.\sin\frac{a-b}{2}.\cos\frac{a+b}{2}\right)$

Çözüm : $\frac{\sin 54 - \sin 18}{\sin 18.\sin 54} = \frac{2.\sin\frac{54-18}{2}.\cos\frac{54+18}{2}}{\sin 18.\sin 54} = \frac{2.\sin 18.\cos 36}{\sin 18.\sin 54} = 2$

(sin54=cos36)

ÖRNEK 18: $a - b = 58°$ ise $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = ?$

Çözüm:

$(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = (\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2$

$= \cos^2 a + 2.\cos a.\cos b + \cos^2 b + \sin^2 a + 2\sin a \sin b + \sin^2 b$

$= \underbrace{(\cos^2 a + \sin^2 a)}_{1} + \underbrace{(\cos^2 b + \sin^2 b)}_{1} + 2\underbrace{(\cos a.\cos b + \sin a.\sin b)}_{\cos(a-b)}$

$= 2 + 2 . \cos(a-b)$

$= 2 + 2 . \cos 58$ $(\cos 58 \cong 0,5299)$

$= 2 + 2 . 0,5299$

$= 2 + 1,0598$

$= 3,0598$

ÖRNEK 19: $\cos 255 - \cos 165 = ?$

Çözüm: $\cos a - \cos b = -2.\sin\frac{a+b}{2} . \sin\frac{a-b}{2}$

$\cos 255 - \cos 165 = -2 . \sin\frac{255+165}{2} . \sin\frac{255-165}{2}$

$= -2 . \sin\frac{420}{2} . \sin\frac{90}{2}$

$= -2 . \sin 210 . \sin 45$

$= -2 . \frac{-1}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= +\frac{\sqrt{2}}{2}$

ÖRNEK 20: $sin20.\,sin40.\,sin60.\,sin80 \;=?$

Çözüm: $\underbrace{\sin 20.\,sin40}.\,sin60.\,sin80 = -\frac{1}{2}[\cos(40+20)-\cos(40-20)].\frac{\sqrt{3}}{2}.\sin 80$

$$= -\frac{1}{2}(\cos 60 - \cos 20).\frac{\sqrt{3}}{2}.\sin 80$$

$$= \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 20\right).\frac{\sqrt{3}}{2}.\sin 80$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 80 + \frac{\sqrt{3}}{4}\underbrace{\cos 20.\sin 80}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80 + \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{1}{2}\left[\sin(80+20)-\sin(80-20)\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80 + \frac{\sqrt{3}}{8}(\sin 100 - \sin 60)$$

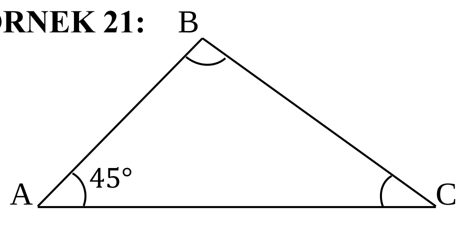
$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\underbrace{\sin 100 - \sin 80}\right) - \frac{\sqrt{3}}{8}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left(2.\sin\frac{100-80}{2}.\cos\frac{100+80}{2}\right) - \frac{3}{16}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left(2.\sin 10\,.\underbrace{\cos 90}_{0}\right) - \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$= -\frac{3}{16}$$

ÖRNEK 21:



$b = 9\ cm$ $\quad\widehat{A} = 45°$

$c = 7\ cm$ $\quad\widehat{B} = ?$

$a = ?$ $\quad\widehat{C} = ?$

Alan = ?

Çözüm: Öncelikle kosinüs teoremini kullanarak a kenarının uzunluğunu bulalım:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}$$

$$a^2 = 9^2 + 7^2 - 2.9.7.\cos 45°$$

$$a^2 = 81 + 49 - 2.9.7.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a^2 = 130 - 63\sqrt{2} \Rightarrow a^2 \cong 40{,}9 \qquad \Rightarrow \qquad a \cong 6{,}4\ cm$$

Şimdi de sinüs teoremini kullanarak $\hat{B}$ açısını bulalım:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \frac{6{,}4}{\sin 45°} = \frac{9}{\sin\hat{B}} \qquad (\sin 45° \cong 0{,}71 \text{ olarak alacağız.})$$

$$\Rightarrow \frac{6{,}4}{0{,}71} = \frac{9}{\sin\hat{B}}$$

$$\Rightarrow \sin\hat{B} = \frac{9\,.\,0{,}71}{6{,}4}$$

$$\Rightarrow \sin\hat{B} = 0{,}9984375$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \arcsin(0{,}9984375)$$

$$\Rightarrow \hat{B} \cong 86{,}8°$$

Bir üçgenin iç açıları toplamı $180°$ olduğuna göre $\hat{C}$ açısı doğrudan bulunabilir:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \quad \Rightarrow \quad 45° + 86{,}8° + \hat{C} = 180°$$

$$\Rightarrow \quad 45° + 86{,}8° + \hat{C} = 180°$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 180° - 131{,}8°$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 48{,}2°$$

Son olarak $\widehat{ABC}$ üçgeninin alanını hesaplayalım:

$$A = \frac{b.c.sin\,\hat{A}}{2} = \frac{9.7.\sin 45°}{2} = \frac{63.\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{63\sqrt{2}}{4}cm^2$$

SORULAR

1) $1513°,\ 2442°,\ 4788°$ açılarının esas ölçülerini bulunuz.

2) $\frac{17\pi}{3}, \frac{41\pi}{6}, \frac{37\pi}{5}$ açılarının esas ölçülerini bulunuz.

3) $\sin 75, \tan 15, \cot 75, \cot 105, \cos 135$ değerlerini toplam ve fark formüllerini kullanarak hesaplayınız.

4) $\dfrac{\sin 36}{\sin 12} - \dfrac{\cos 36}{\cos 12} = ?$

5) Bir dik üçgende $\sin\alpha = \dfrac{7}{11}$ olduğuna göre $\dfrac{1}{\cot\alpha} - 2\cos\alpha + \tan\alpha = ?$

6) $cos20 \,.\, cos40 \,.\, cos60 \,.\, cos80 = ?$

7) Aşağıdaki değerleri hesap makinesi ile bulunuz.

$a)\ \sin\alpha = \dfrac{2}{7}\quad ise\quad \alpha = ?$ $\qquad c)\ \cos\hat{B} = \dfrac{3}{5}\quad ise\quad \hat{B} = ?$

$b)\ \tan\hat{A} = \dfrac{2}{7}\quad ise\quad \hat{A} = ?$ $\qquad d)\ \cot\beta = \dfrac{2}{7}\quad ise\quad \beta = ?$

8) $a)\ \arcsin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = ?$

$b)\ \sin\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right) = ?$

$c)\ \cos\left(\arcsin\dfrac{5}{11}\right) = ?$

9) a) $cos\left(arcsin\frac{5}{13} - arccos\frac{4}{5}\right) = ?$

b) $tan\left(arcsin\frac{15}{17} - arccos\frac{3}{5}\right) = ?$

10) a) $\sin 3a = \sin a\,(4\ \cos^2 a - 1)$ olduğunu gösteriniz.

b) $\cos 3a = ?$

11) $3\sec^2 x = 8\tan x - 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

12) $6\sin^2 x - 11\sin x + 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

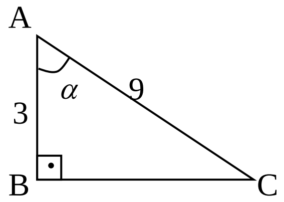
13) $\sec^2 x + \tan^2 x = 7$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

14) $\dfrac{\tan x}{\sec^2 x} + \dfrac{\cot x}{\cos ec^2 x} = sin2x$ olduğunu gösteriniz.

15) $\dfrac{1+cos^2x.cosec^2x}{1+sin^2x.sec^2x} = ?$

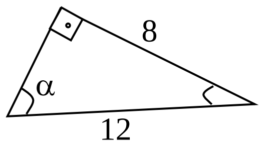
16) $\dfrac{2.\sin x.\cos x}{1+cos^2x - sin^2x} = ?$

17)



Şekle göre $\dfrac{\sin\alpha}{\sec\alpha.\tan\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha.\cot\alpha}=?$

18)



Yandaki dik üçgene göre;

$\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha+(\tan\alpha-\cot\alpha)^2=?$ (cevap: $\frac{-17}{60}$)

19) $\alpha<90^o$ ve $\sin\alpha=\dfrac{7}{11}$ olduğuna göre;

$\dfrac{\sin\alpha}{\sec\alpha.\tan\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha.\cot\alpha}=?$ (cevap: $\frac{23}{121}$)

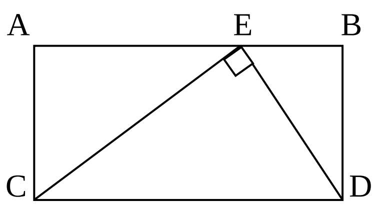
20) $\dfrac{\tan x}{\sec^2 x}+\dfrac{\cot x}{\operatorname{cosec}^2 x}=\sin 2x$ olduğunu gösteriniz.

21) $\dfrac{1+\cos^2 x.\operatorname{cosec}^2 x}{1+\sin^2 x.\sec^2 x}=?$

22) $\arccos(2x^2-x)=\frac{\pi}{3}$ ise $x=?$

23) $x=\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ise $\cos 2x+\sin x=?$

24)

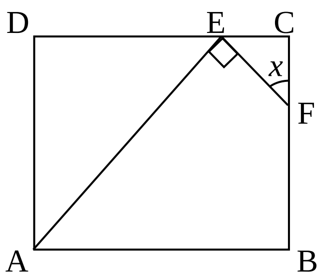


ABCD dikdörtgen

|EC|>|DE|

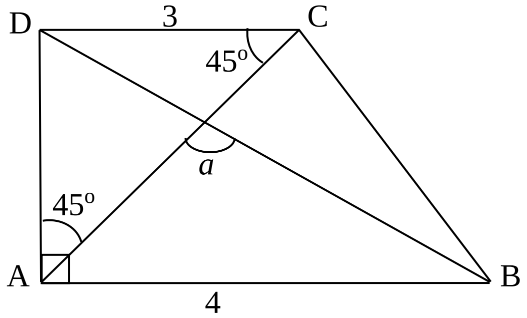
|AB| = 17, |BD| = 4 ise |ED| = ?

25)



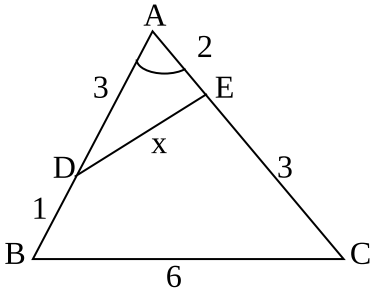
şekle göre $\sin x=?$

26)



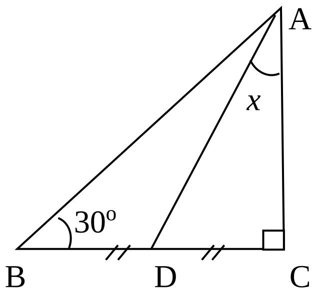
Şekle göre $\sin a = ?$

27)



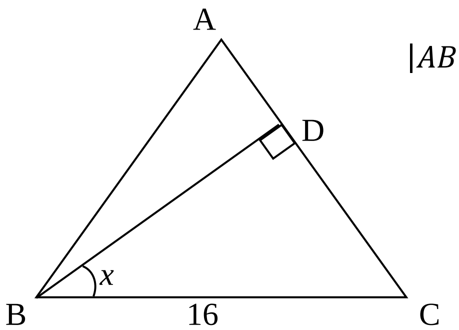
Şekle göre $|DE| = x = ?$

28)



Şekle göre $\tan x = ?$

29)



$|AB| = |AC| = 10$ ise $\sin x + \tan x = ?$

30) Bir $\widehat{ABC}$'de $a = 2\sqrt{7}$, $b = 4$, $c = 6$ ise $\hat{A} = ?$, $\hat{B} = ?$, $\hat{C} = ?$, $A = ?$

31) Bir $\widehat{ABC}$'de $a = 6$, $\hat{A} = 45^{\circ}$, $\hat{C} = 75^{\circ}$ ise $\hat{B} = ?$, $b = ?$, $c = ?$, $A = ?$

32) Bir $\widehat{ABC}$'de $a = 13$, $b = 4$, $\cos \hat{C} = \dfrac{-5}{13}$ ise $R = ?$, $c = ?$, $\hat{A} = ?$, $\hat{B} = ?$, $\hat{C} = ?$, $A = ?$

33) Bir $\widehat{ABC}$'de $a = 2b$, $\hat{C} = 60^{\circ}$ ise $\hat{A} = ?$, $\hat{B} = ?$, $A = ?$

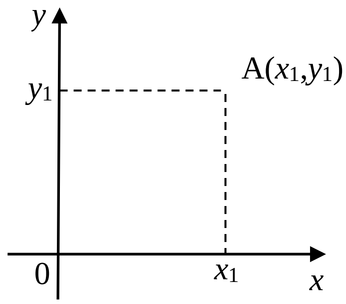
------------------------------------ ◈ ------------------------------------

DOĞRUNUN ANALİTİĞİ

Dik Koordinat Sistemi

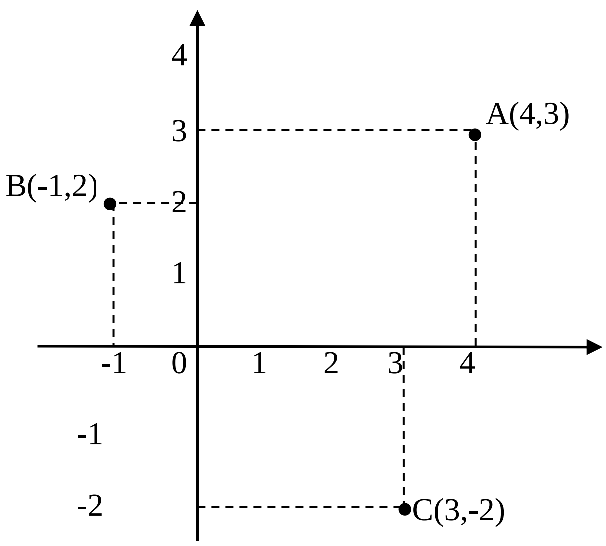
Düzlemde birbirini dik kesen iki eksenin (sayı doğrusunun) oluşturduğu sisteme “dik koordinat sistemi” denir. Yatay eksen x (apsis), dikey eksen y (ordinat) ile gösterilir. Düzlemdeki her noktaya bir sayı ikilisi karşılık gelir. Aşağıdaki şekilde herhangi bir A noktasının apsis ve ordinatı x_1 ve y_1 ile gösterilmiştir.

•



ÖRNEK 1: A(4,3), B(-1,2), C(3,-2) noktalarını koordinat düzleminde gösteriniz.

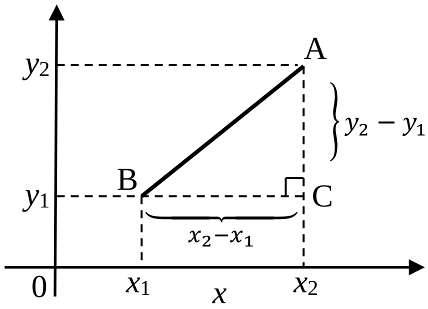
Çözüm:



SORU 1: A(-5,3), B(4,1), C(-2,-1), D(3,-2) noktalarını koordinat düzleminde gösteriniz.

İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Düzlemde herhangi iki nokta A(x_1,y_1) ve B(x_2,y_2) olsun.



Amacımız A ve B noktası arasındaki mesafeyi hesaplamak. Bunun için yukarıdaki şekilde de görüldüğü gibi, meydana gelen ABC dik üçgeninde Pisagor teoremini uyguluyoruz:

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$$

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\boxed{|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

NOT: Kök içindeki ifadelerin karesi alındığı için B'nin koordinatlarından A'nın koordinatlarını çıkarmak yerine bunun tam tersi de yazılabilir. Yani $x_2 - x_1$ yerine $x_1 - x_2$ ve $y_2 - y_1$ yerine $y_1 - y_2$ yazılabilir.

ÖRNEK 2: A(6,3) ve B(1,4) noktaları arasındaki mesafeyi hesaplayınız.

Çözüm: $|AB| = \sqrt{(6-1)^2 + (3-4)^2}$

$|AB| = \sqrt{5^2 + (-1)^2}$

$|AB| = \sqrt{26}$

ÖRNEK 3: A(-6,3) ve B(2,-1) noktaları arasındaki mesafeyi hesaplayınız.

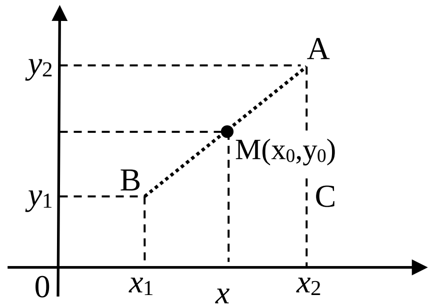
Çözüm: $|AB| = \sqrt{(-6-2)^2 + (3-(-1))^2}$

$|AB| = \sqrt{(-8)^2 + (4)^2}$

$|AB| = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = \sqrt{16.5} = 4\sqrt{5}$

İki Noktanın Orta Noktasının Koordinatları

Düzlemde herhangi iki nokta A(x_1,y_1) ve B(x_2,y_2) olsun. A ve B nin orta noktası da M(x_0,y_0) olsun.



Amacımız M noktasının koordinatları olan x_0 ve y_0 değerlerini hesaplamak.

$$x_0 = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{2x_1 + x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_0 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2} = \frac{2y_1 + y_2 - y_1}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Sonuç olarak A ve B'nin orta noktası şu şekildedir:

$$\boxed{\mathrm{M}(x_0, y_0) = \mathrm{M}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$

ÖRNEK 4: A(0,1) ve B(6,7) noktalarının orta noktasının koordinatlarını bulunuz

Çözüm : $\mathrm{M}(x_0, y_0) = \mathrm{M}\left(\frac{0+6}{2}, \frac{1+7}{2}\right) = \mathrm{M}(3,4)$

ÖRNEK 5: A(6,3), B(1,-3), C(-4,4) ve D(-2,5) noktaları veriliyor. AB'nin orta noktası ile CD'nin orta noktası arasındaki mesafeyi hesaplayınız.

Çözüm : AB'nin orta noktası E olsun : $\mathrm{E}\left(\frac{6+1}{2}, \frac{3-3}{2}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{7}{2}, 0\right)$

CD'nin orta noktası F olsun : $\mathrm{F}\left(\frac{-4-2}{2}, \frac{4+5}{2}\right) = \mathrm{F}\left(-3, \frac{9}{2}\right)$

Şimdi de EF mesafesini hesaplayalım :

$$|EF| = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - (-3\right)^2 + \left(0 - \frac{9}{2}\right)^2}$$

$$|EF| = \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 + \left(-\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{4} + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{250}{4}} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

SORU 2: Bir ABCD paralelkenarında A(-2,2), B(4,6) ve C(8,-1) olduğuna göre D(x,y)=?

Üç Köşesinin Koordinatları Bilinen Üçgen

Bir $\widehat{ABC}$'nin köşe noktaları A(x_1,y_1), B(x_2,y_2) ve C(x_3,y_3) olsun.

a) Ağırlık merkezi : $\boxed{G(x_0,y_0)=G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)}$

b) Alan : $\boxed{A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1)|}$

Not:

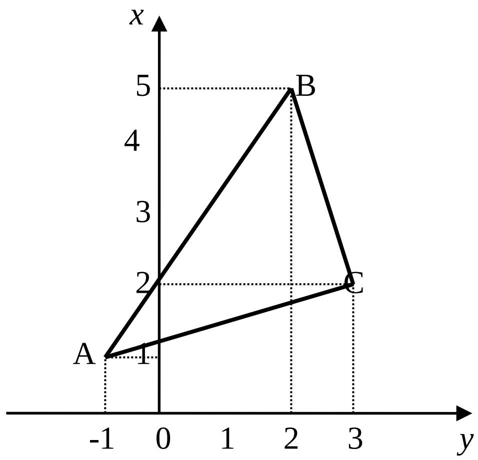
1. Yukarıdaki alan formülünde son satıra ilk satırın tekrar yazıldığına dikkat ediniz.
2. Alan formülünde noktaların koordinatları yukarıdaki sıra ile yazılmak zorunda değildir, istenilen sırada yazılabilir. Ancak ilk satıra hangi nokta kullanılmışsa son satırda da o noktanın koordinatları tekrar yazılmalıdır.
3. Alan formülünde işlemlerin mutlak değer içinde yapıldığına dikkat ediniz. Çünkü alan negatif olamaz. Bu nedenle eğer işlem sonucu negatif çıkarsa pozitif olarak kullanılır.

ÖRNEK 6: Bir ABC üçgeninin köşe noktalarının koordinatları A(-1,1), B(2,5) ve C(3,2) olsun. Buna göre aşağıda istenenleri hesaplayınız.

a) ABC üçgenini koordinat düzleminde çiziniz.
b) Ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.
c) ABC üçgeninin alanını bulunuz.
d) ABC üçgeninin çevre uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:

a)



b) $G(x_0, y_0) = G\left(\frac{-1+2+3}{3}, \frac{1+5+2}{3}\right) = G\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

c) $A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-5+4+3-(2+15-2)| = \frac{1}{2}|2-15| = \frac{13}{2} = 6{,}5\ br^2$

d) Çevre uzunluğu üç kenar uzunluğunun toplamıdır. Her bir kenar ise iki nokta arasındaki mesafe formülü ile hesaplanır:

$|AB| = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$|BC| = \sqrt{(2-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$|AC| = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$Ç = |AB| + |BC| + |AC|$

$Ç = 5 + \sqrt{10} + \sqrt{17}\ br.$

SORU 3: Bir ABC üçgeninin köşe noktalarının koordinatları A(-4,3), B(-1,7) ve C(5,1) olsun. Buna göre aşağıda istenenleri hesaplayınız.

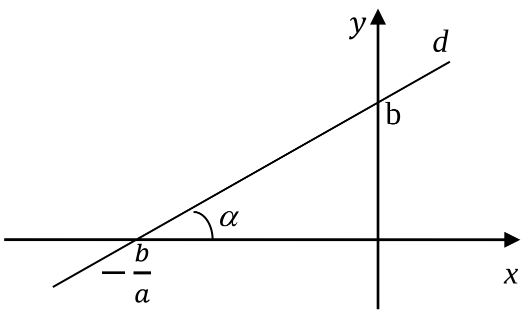
a) ABC üçgenini koordinat düzleminde çiziniz.
b) Ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz (G=?).
c) ABC üçgeninin alanını bulunuz (A=?).
d) ABC üçgeninin çevre uzunluğunu bulunuz (Ç=?).
e) b kenarına ait kenarortayın uzunluğunu bulunuz ($|V_b|$=?).
f) a kenarına ait yüksekliğin uzunluğunu bulunuz ($|h_a|$=?).

Eğim ve Doğru Denklemi

Eğim: Bir doğrunun eğimi, o doğrunun x-ekseni ile yaptığı açının tanjant değerine eşittir.

$\boxed{\boldsymbol{m = tan\alpha}}$

$y = ax + b$ denklemi ile verilen doğrunun grafiği yandaki gibidir. Buna göre:



$m = tan\alpha = \frac{b}{\frac{b}{a}} = b.\frac{a}{b} = a$

İki noktası bilinen doğrunun eğimi: Eğer bir doğru A(x_1,y_1) ve B(x_2,y_2) noktalarından geçiyorsa bu doğrunun eğimi:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \qquad veya \qquad \boxed{m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}$$

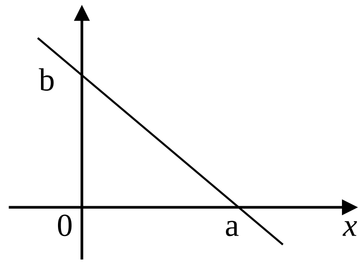
şeklindedir.

Doğru denklemi : Bir doğrunun denklemi açık ve kapalı formlarda olmak üzere iki şekilde yazılabilir.

d: $y = ax + b$ ⟶ açık formda doğru denklemi $\boxed{m = a}$

d: $ax + by + c = 0$ ⟶ kapalı formda doğru denklemi $\boxed{m = -\frac{a}{b}}$

Eğer bir doğrunun eksenleri kestiği nokta biliniyorsa bu doğrunun denklemi yazılabilir. *x*-eksenini kestiği nokta a, y-eksenini kestiği nokta b ise bu doğrunun denklemi şu şekildedir:



$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Yukarıdaki ifadede paydalar eşitlenirse

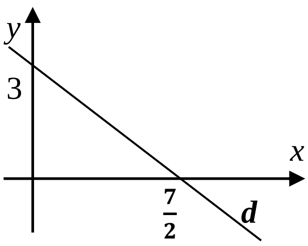
$$\boxed{bx + ay - ab = 0}$$

elde edilir ki bu formülü kullanmak daha pratiktir.

NOT: $0° < \alpha < 90°$ $\quad ise\ m = \tan\alpha > 0$ (Eğim pozitifse α dar açıdır)

$90° < \alpha < 180°$ $\quad ise\ m = \tan\alpha < 0$ (Eğim negatifse α geniş açıdır)

ÖRNEK 7: Şekle göre *d* doğrusunun açık ve kapalı denklemini yazıp, eğimini bulunuz.



d: $bx + ay - ab = 0$

d: $3x + \frac{7}{2}y - \frac{21}{2} = 0$

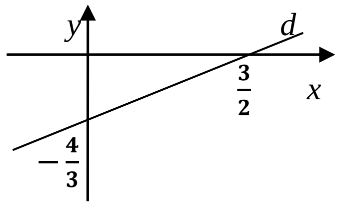
d: $6x + 7y - 21 = 0$ → kapalı denklem

yukarıdaki denklemde *y*'yi yalnız bırakarak açık denklem bulunur:

d: $y = -\frac{6}{7}x + 3$ → açık denklem

$$m = -\frac{6}{7}$$

ÖRNEK 8: Şekle göre d doğrusunun denklemini ve eğimini bulunuz.



$d: \; bx + ay - ab = 0$

$d: \; -\frac{4}{3}x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}.\left(-\frac{4}{3}\right) = 0$

$d: \; -\frac{4}{3}x + \frac{3}{2}y + 2 = 0$ (her iki tarafı 6 ile çarpacağız)

$d: \; -8x + 9y + 12 = 0$

$m = -\frac{a}{b} = -\frac{-8}{9} = \frac{8}{9}$

İki Doğrunun Paralellik ve Diklik şartı

$\left.\begin{array}{l} d_1: \;\; y = a_1x + b_1 \\ d_2: \;\; y = a_2x + b_2 \end{array}\right\}$ doğruları verilsin. Bu doğruların eğimi m_1 ve m_2 olsun.

a) $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow m_1 = m_2$

b) $d_1 \perp d_2 \Rightarrow m_1.m_2 = -1$

Eğer doğru denklemleri aşağıdaki gibi kapalı formda verilmişse bu doğruların birbirine göre ne durumda oldukları, katsayılarının oranlanması ile belirlenir.

$\left.\begin{array}{l} d_1: \;\; a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ d_2: \;\; a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$ doğruları verilsin.

a) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow d_1$ ve d_2 çakışıktır (aynı doğrular).

b) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$

c) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow d_1$ ve d_2 kesişen doğrulardır.

ÖRNEK 9: $\left.\begin{array}{l} d_1: \;\; x - 2y + 3 = 0 \\ d_2: \;\; 3x - 6y + 9 = 0 \end{array}\right\}$ doğrularının birbirine göre durumları nedir?

Çözüm: $\left.\begin{array}{r} x - 2y + 3 = 0 \\ 3x - 6y + 9 = 0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminde katsayıları oranlayalım.

$\frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} = \frac{3}{9}$ olduğundan yukarıdaki *a* şıkkı gereğince d_1 ve d_2 çakışıktır.

ÖRNEK 10: $\left.\begin{array}{ll} d_1: & y=\frac{2}{3}x+2 \\ d_2: & 2x-3y+4=0 \end{array}\right\}$ doğrularının birbirine göre durumları nedir?

Çözüm: $\left.\begin{array}{lll} y=\frac{2}{3}x+2 & \rightarrow & 2x-3y+6=0 \\ 2x-3y+4=0 & \rightarrow & 2x-3y+4 \end{array}\right\}$ denklem sisteminde katsayıları oranlayalım:

$\frac{2}{2}=\frac{-3}{-3}\neq\frac{6}{4}$ olduğundan yukarıdaki *b'* şıkkı gereğince d_1 ve d_2 paraleldir.

ÖRNEK 11: $\left.\begin{array}{ll} d_1: & y=4x-5 \\ d_2: & x+3y-1=0 \end{array}\right\}$ doğrularının birbirine göre durumları nedir?

Çözüm: $\left.\begin{array}{lll} y=4x-5 & \rightarrow & 4x-y-5=0 \\ x+3y-1=0 & \rightarrow & x+3y-1=0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminde katsayıları oranlayalım:

$\frac{4}{1}\neq\frac{-1}{3}\neq\frac{-5}{-1}$ olduğundan yukarıdaki *c'* şıkkı gereğince d_1 ve d_2 kesişen doğrulardır.

(Eğimleri çarpımı -1 olmadığından bu iki doğru dik kesişmezler, farklı bir açı ile birbirini keserler)

ÖRNEK 12: $A(-2,3)$, $B(3,1)$, $C(a,2)$ noktaları veriliyor. $AB\perp BC$ olması için a ne olmalıdır?

Çözüm: AB'nin eğimi $m_1=\frac{1-3}{3-(-2)}=\frac{-2}{5}$

BC'nin eğimi $m_2=\frac{2-1}{a-3}=\frac{1}{a-3}$

$AB\perp BC \Rightarrow m_1.m_1=-1$

$\Rightarrow\frac{-2}{5}\cdot\frac{1}{a-3}=-1$

$\Rightarrow\frac{-2}{5a-15}=-1$

$\Rightarrow 5a-15=2$

$\Rightarrow 5a=17$

$\Rightarrow a=\frac{17}{5}$

ÖRNEK 13: $A(1,2)$, $B(2,-1)$, $C(3,4)$, $D(2,k)$ noktaları veriliyor. Bu noktaların meydana getirdiği doğrular için,

a) $AB /\!/ CD$ olması için k ne olmalıdır?

b) $AB \perp CD$ olması için k ne olmalıdır?

Çözüm: Öncelikle *AB* ve *CD* doğrularının eğimlerini bulalım:

AB'nin eğimi $m_1 = \frac{-1-2}{2-1} = -3$

DC'nin eğimi $m_2 = \frac{k-4}{2-3} = \frac{k-4}{-1} = 4 - k$

a) $AB /\!/ CD \Rightarrow m_1 = m_2$

$\Rightarrow -3 = 4 - k$

$\Rightarrow k = 7$

b) $AB \perp CD \Rightarrow m_1 . m_1 = -1$

$\Rightarrow -3.(4-k) = -1$

$\Rightarrow -12 + 3k = -1$

$\Rightarrow 3k = 11$

$\Rightarrow k = \frac{11}{3}$

SORU4: $\left.\begin{array}{l} d_1: \ y = (2m-4)x + 3 \\ d_2: \ y = (4-m)x + 1 \end{array}\right\}$ doğruları veriliyor $a)$ $d_1 /\!/ d_2$ olması için $m =$? $b)$ $d_1 \perp d_2$ olması için $m =$?

Bir noktası ve Eğimi Bilinen Doğrunun Denklemi

Eğimi m olan herhangi bir d doğrusunun denkleminin $y = ax + b$ şeklinde olduğu daha önce belirtilmişti. Eğer bu doğru üzerindeki herhangi bir nokta $A(x_1, y_1)$ ise bu noktanın koordinatları *d* doğrusunun denklemini sağlar. O halde $y_1 = ax_1 + b$ yazılabilir. Böylece

$$y = ax + b$$

$$y_1 = ax_1 + b$$

Şeklinde bir sistem elde ederiz. Bu iki denklemi taraf tarafa çıkardığımızda

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

Elde edilir. Burada $m = a$ olduğundan, $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen doğrunun denklemi

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

şeklinde elde edilir.

ÖRNEK 14: $A(3,4)$ noktasından geçen ve eğimi 2 olan doğrunun denklemini yazınız.

Çözüm: $\underset{x_1\ y_1}{A(3\,,4)}, \quad m = 2$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = 2(x - 3)$$
$$\Rightarrow \quad y - 4 = 2x - 6$$
$$\Rightarrow \quad 2x - y - 2 = 0 \quad \text{veya} \quad y = 2x - 2$$

ÖRNEK 15: $A(2,-3)$ noktasından geçen ve eğimi 4 olan doğrunun denklemini yazınız.

Çözüm: $\underset{x_1\ y_1}{A(2\,,-3)}, \quad m = 4$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - (-3) = 4(x - 2)$$
$$\Rightarrow \quad y + 3 = 4x - 8$$
$$\Rightarrow \quad 4x - y - 11 = 0 \quad \text{veya} \quad y = 4x - 11$$

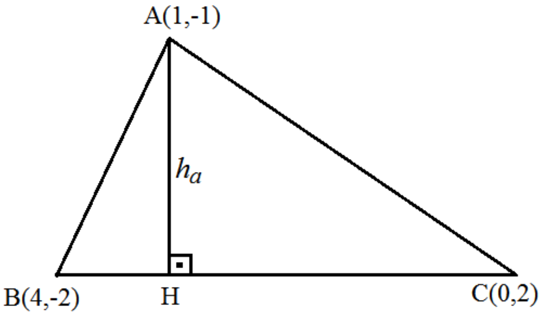
ÖRNEK 16: Eğimi $-\frac{3}{4}$ olan ve $A\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ noktasından geçen doğrunun denklemini yazınız.

Çözüm: $A\left(\underset{x_1}{-\frac{1}{2}}\,,\,\underset{y_1}{\frac{5}{2}}\right), \quad m = -\frac{3}{4}$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - \frac{5}{2} = -\frac{3}{4} \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$\Rightarrow \frac{2y-5}{2} = -\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2x+1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{2y-5}{2} = \frac{-6x-3}{8}$$
$$\Rightarrow 2y - 5 = \frac{-6x-3}{4}$$
$$\Rightarrow 8y - 20 = -6x - 3$$
$$\Rightarrow 6x + 8y - 17 = 0$$

ÖRNEK 17: $A(1,-1)$, $B(4,-2)$, $C(0,2)$ noktaları veriliyor. ABC üçgeninin h_a yüksekliğinin denklemini yazınız.

Çözüm:



$$m_{BC}=\frac{2-(-2)}{0-4}=\frac{4}{-4}=-1$$

$$m_{BC}\,.\,m_{AH}=-1 \quad (BC\perp AH \text{ olduğundan})$$

$$(-1).m_{AH}=-1$$

$$m_{AH}=1$$

Şu durumda h_a doğrusunun denklemi, eğimi 1 olan ve A(1,-1) noktasından geçen doğrunun denklemidir.

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \Longrightarrow \quad y-(-1)=1(x-1)$$

$$\Longrightarrow \quad y+1=x-1$$

$$\Longrightarrow \quad h_a\!: \ x-y-2=0 \quad \text{veya} \quad h_a: \ y=x-2$$

ÖRNEK 18: $A(3,-1)$ noktasından geçen ve $d_1\!: 2x+y-4=0$ doğrusuna paralel olan d_2 doğrusunun denklemini yazınız.

Çözüm: $d_1 /\!/ d_1 \quad \Longrightarrow \quad m_1=m_2$ olmalı. Dolayısı ile $m_1=m_2=-2$ olur. O halde eğimi -2 olan ve A(3,-1) noktasından geçen doğrunun denklemini yazmalıyız:

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \Longrightarrow \quad y-(-1)=-2(x-3)$$

$$\Longrightarrow \quad y+1=-2x+6$$

$$\Longrightarrow \quad d_2\!: \ 2x+y-5=0$$

ÖRNEK 19: $P(-2,3)$ noktasından geçen ve $d_1\!: x-5y+1=0$ doğrusuna dik olan d_2 doğrusunun denklemini yazınız.

Çözüm: $d_1 \perp d_1 \quad \Longrightarrow \quad m_1.m_2=-1$ olmalı. $m_1=\frac{1}{5}$ olduğuna göre $m_2=-5$ olur. O halde eğimi -5 olan ve P(-2,3) noktasından geçen doğrunun denklemini yazmalıyız:

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \Longrightarrow \quad y-3=-5(x-(-2))$$

$$\Longrightarrow \quad y-3=-5x-10$$

$$\Longrightarrow \quad d_2\!: \ 5x+y+7=0$$

İki Noktası Bilinen Doğrunun Denklemi

Bir d doğrusu üzerindeki iki nokta A(x_1,y_1) ve B(x_2,y_2) olsun. Daha önce bu iki noktadan geçen doğrunun eğiminin $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ olduğunu belirtmiştik. O halde eğimi ve en az bir noktası bilinen doğru denklemini kullanarak A ve B noktalarından geçen doğrunun denklemi elde edilebilir:

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \Longrightarrow \quad y-y_1=\underbrace{\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)}_{m}.(x-x_1)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$$

ÖRNEK 20: $A(3,-1)$ ve $B(0,2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini yazınız.

Çözüm: $\underset{x_1\ \ y_1}{A(\,3\,,-1)}\ \ \underset{x_2\ \ y_2}{B(\,0\,,\ 2)}$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \Longrightarrow \frac{y-(-1)}{2-(-1)}=\frac{x-3}{0-3}$$

$$\Longrightarrow \frac{y+1}{3}=\frac{x-3}{-3}$$

$$\Longrightarrow x-3=-y-1$$

$$\Longrightarrow x+y-2=0 \quad \text{veya} \quad y=-x+2$$

ÖRNEK 21: $A(1,2)$ ve $B(-3,4)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini yazınız.

Çözüm: $\underset{x_1\ \ y_1}{A(\,1\,,\ 2)}\ \ \underset{x_2\ \ y_2}{B(-3\,,\ 4)}$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y-2}{4-2}=\frac{x-1}{-3-1}$$

$$\Longrightarrow \frac{y-2}{2}=\frac{x-1}{-4}$$

$$\Longrightarrow 2x-2=-4y+8$$

$$\Longrightarrow 2x+4y-10=0$$

$$\Longrightarrow x+2y-5=0$$

ÖRNEK 22: $A(2,-3)$, $B(4,1)$ve $C(a,2)$ noktaları veriliyor. AC doğrusunun B noktasından geçmesi için $a=$?

Çözüm: AC doğrusunun B noktasından geçmesi için A,B,C noktaları doğrusal olmalıdır. Yani üç nokta da aynı doğru üzerinde olmalıdır. Buna göre AB nin eğimi ile AC nin eğimi eşit olur.

$$\left.\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{-3-1}{2-4} = \frac{-4}{-2} = 2 \\ m_{AC} &= \frac{-3-2}{2-a} = \frac{-5}{2-a} \end{aligned}\right\} \frac{-5}{2-a} = 2 \quad \Longrightarrow \quad -5 = 4-2a$$

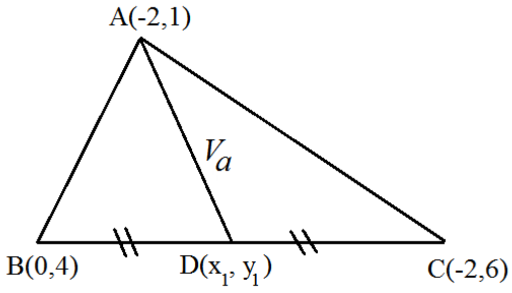
$$\Longrightarrow \quad -5 = 4-2a$$

$$\Longrightarrow \quad 2a = 9$$

$$\Longrightarrow \quad a = \frac{9}{2}$$

ÖRNEK 23: Köşe koordinatları $A(-2,1)$, $B(0,4)$ ve $C(-2,6)$ olan ABC üçgeninin V_a kenarortayının denklemini yazınız.

Çözüm:



D noktası BC nin orta noktasıdır:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{0-2}{2} = -1 \\ y_1 &= \frac{4+6}{2} = 5 \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad D(-1,5)$$

V_a doğrusu A ve D noktalarından geçen doğrudur. Dolayısı ile iki noktadan geçen doğru denklemini kullanarak V_a nın denklemi elde edilir:

$$\underset{x_1\ y_1}{A(-2\,,\ 1)}\underset{x_2 y_2}{B(-1\,,5)}$$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y-1}{5-1} = \frac{x-(-2)}{-1-(-2)}$$

$$\Longrightarrow \frac{y-1}{4} = \frac{x+2}{1}$$

$$\Longrightarrow 4x+8 = y-1$$

$$\Longrightarrow 4x-y+9 = 0 \quad \text{veya} \quad y = 4x+9$$

İki Doğrunun Kesim Noktasının Koordinatları

Denklemleri belli olan iki doğru verilsin. Bu iki doğrunun eğimleri farklı ise birbirini keser. Bu kesim noktası her iki doğruya da ait olduğu için, bu noktanın koordinatları her iki doğru denklemini de sağlar. Sonuç olarak, iki doğrunun kesim noktasını bulmak için, verilen doğru denklemlerinin oluşturduğu denklem sistemi çözülür.

ÖRNEK 24: $\left.\begin{array}{ll} d_1: & 3x+4y-5=0 \\ d_2: & x-2y+5=0 \end{array}\right\}$ doğrularının kesim noktasını bulunuz.

Çözüm: $\left.\begin{array}{r} 3x+4y-5=0 \\ x-2y+5=0 \end{array}\right\}$ denklem sistemini çözeceğiz.

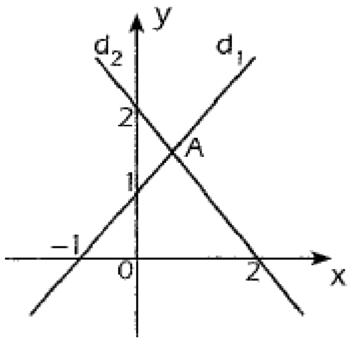
$$\begin{array}{rr} & 3x+4y-5=0 \\ 2/ & x-2y+5=0 \\ \hline & 3x+\ 4y-5\ =0 \\ + & 2x-4y+10=0 \\ \hline & 5x=-5 \\ & x=-1 \end{array}$$

$x=-1$ değerini $x-2y+5=0$ denkleminde yerine yazarsak:

$$-2y+4=0$$
$$y=2$$

Böylece verilen doğruların kesim noktası $(-1,2)$ olur.

ÖRNEK 25:



Şekildeki d_1 ve d_2 noktalarının kesim noktası olan A'nın koordinatları nedir?

Çözüm: Şekle göre verilen doğruların denklemlerini yazarsak:

$$d_1: \ \frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1 \quad \Rightarrow \quad -x+y=1$$

$$d_2: \ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1 \quad \Rightarrow \quad x+y=2$$

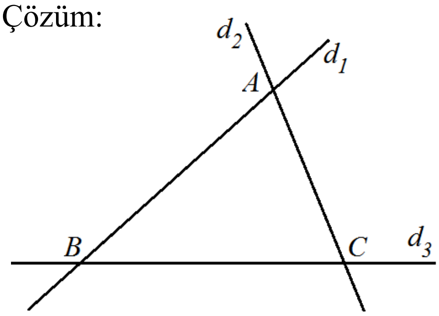
$\left.\begin{array}{r} -x+y=1 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözümü: $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}$

Sonuç olarak $d_1 \ ve \ d_2$ noktalarının kesim noktası $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ olur.

ÖRNEK 26:

$$\left.\begin{array}{l} d_1:\ x-4y=-14 \\ d_2:\ 2x+3y=5 \\ d_3:\ 3x-\ y\ =13 \end{array}\right\}$$ doğrularının oluşturduğu üçgenin köşe noktalarını bulunuz.

Çözüm:



Verilen doğrular tarafından oluşturulan üçgen yandaki gibi olsun. Burada köşelerin harflendirme sırası değişebilir.

$d_1 \cap d_2 \rightarrow$ A noktasını verir:

$$\begin{array}{rr} -2/ & x-4y=-14 \\ & 2x+3y=5 \\ \hline & -2x+8y\ =28 \\ + & 2x+3y=5 \\ \hline & 11y=33 \\ & y=3 \end{array}$$

$y=3$ değerini $x-4y=-14$ denkleminde yerine yazalım

$x-12=-14$
$x=-2$

$A(-2{,}3)$

$d_1 \cap d_3 \rightarrow$ B noktasını verir:

$$\begin{array}{rr} -3/ & x-4y=-14 \\ & 3x-\ y\ =13 \\ \hline & -3x+12y\ =42 \\ + & 3x-y\ =\ 13 \\ \hline & 11y=55 \\ & y=5 \end{array}$$

$y=5$ değerini $x-4y=-14$ denkleminde yerine yazalım

$x-20=-14$
$x=6$

$B(6{,}5)$

$d_2 \cap d_3 \rightarrow$ C noktasını verir:

$$\begin{array}{rr} & 2x+3y=5 \\ 3/ & 3x-\ y\ =13 \\ \hline & 2x+3y=5 \\ + & 9x-3y=39 \\ \hline & 11x=44 \\ & x=4 \end{array}$$

$x=4$ değerini $3x-y=13$ denkleminde yerine yazalım

$12-y=13$
$y=-1$

$C(4,-1)$

Üçgenin köşe noktaları: $A(-2{,}3)$, $B(6{,}5)$, $C(4,-1)$.

SORU 5:

$$\left.\begin{array}{l} d_1:\ x-2y=7 \\ d_2:\ x-4y=-11 \\ d_3:\ x-\ y\ =-2 \end{array}\right\}$$ doğrularının oluşturduğu üçgen için istenilenleri bulunuz.

a) Köşe noktalarının koordinatları nedir?

b) Alanı kaç br^2dir?

c) $|v_a|$ =?

d) v_a nın denklemi nedir?

e) h_a nın denklemi nedir?

İki Doğru Arasındaki Açı

d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri sırası ile m_1 ve m_2 olsun. Bu durumda bu iki doğru arasındaki açının tanjantı

$$\boxed{\tan\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1.m_2}}$$

formülü ile hesaplanır. Bu formül iki doğru arasındaki açılardan birinin tanjantını verir. Yani elde edilen değerin negatif ya da pozitif oluşuna göre geniş ya da dar açıyı bulmuş oluruz.

a) $\tan\alpha>0$ ise α dar açının ölçüsüdür.

b) $\tan\alpha<0$ ise α geniş açının ölçüsüdür.

c) $\tan\alpha=0$ ise $\alpha=0°$ dir (yani d_1 ve d_2 paralel ya da çakışıktır).

d) $\tan\alpha$ değeri tanımsız ise $\alpha=90°$ dir (yani $d_1 \perp d_2$).

ÖRNEK 27: $$\left.\begin{array}{l} d_1:\ -x+3y-6=0 \\ d_2:\quad\ x+2y+4=0 \end{array}\right\}$$ doğruları arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm: d_1 doğrusunun eğimi $m_1=-\frac{-1}{3}=\frac{1}{3}$

d_2 doğrusunun eğimi $m_2=-\frac{1}{2}$

$$\tan\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1.m_2}=\frac{\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$$

$$\tan\alpha=1 \quad \Rightarrow \quad \alpha=45°$$

ÖRNEK 28: $\left.\begin{matrix} d_1: & 4x - 2y + 5 = 0 \\ d_2: & x + 2y - 1 = 0 \end{matrix}\right\}$ doğruları arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm: d_1 doğrusunun eğimi $m_1 = -\frac{4}{-2} = 2$

d_2 doğrusunun eğimi $m_2 = -\frac{1}{2}$

$$\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = \frac{2 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{5}{2}}{0} = tanımsız$$

$$\tan\alpha = tanımsız \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 90°$$

ÖRNEK 29: $\left.\begin{matrix} d_1: & 3x + 2y + 7 = 0 \\ d_2: & 4x - 3y + 2 = 0 \end{matrix}\right\}$ doğruları arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm: d_1 doğrusunun eğimi $m_1 = -\frac{3}{2}$

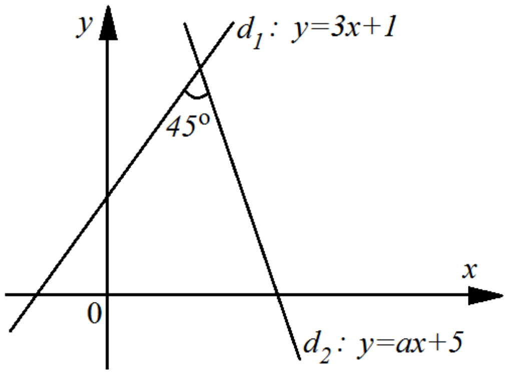
d_2 doğrusunun eğimi $m_2 = \frac{4}{3}$

$$\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{4}{3}}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{4}{3}} = \frac{-\frac{17}{6}}{-1} = \frac{17}{6}$$

$$\tan\alpha = \frac{17}{6} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = tan^{-1}\left(\frac{17}{6}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha \cong 70{,}56°$$

ÖRNEK 30:



Şekle göre $a = ?$

Çözüm: d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri sırası ile $m_1 = 3$ ve $m_2 = a$ dır. Bu iki doğru arasındaki açı $\theta = 45°$ olduğuna göre;

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}\right| \quad \Longrightarrow \quad \tan 45 = \left|\frac{3 - a}{1 + 3a}\right|$$

$$\Longrightarrow \quad 1 = \frac{|3 - a|}{|1 + 3a|}$$

$$\Rightarrow \quad |1+3a| = |3-a|$$

$$\Rightarrow \quad 1+3a = 3-a \quad veya \quad 1+3a = -3+a$$

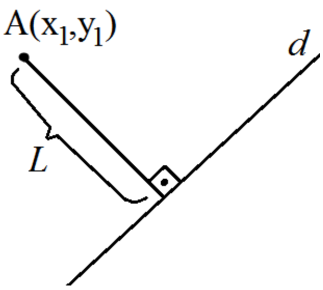
$$\Rightarrow \quad 4a = 2 \quad veya \quad 2a = -4$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \quad veya \quad a = -2$$

Cevap $a = -2$ dir. Çünkü d_2 doğrusunun x-ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı geniş açıdır. Bu nedenle a değeri negatif olmak zorundadır. Formülü mutlak değerli olarak kullanmamızın sebebi de budur.

Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Bir noktanın bir doğruya uzaklığı, o noktadan doğruya indirilen dikmenin uzunluğudur. Bu uzunluğu L ile gösterelim. $A(x_1, y_1)$ noktasının $d\colon\ ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı



$$\boxed{L = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

formülü ile hesaplanır. Uzunluk negatif olamayacağından mutlak değer kullanılmıştır.

ÖRNEK 31: $A(2,3)$ noktasının $d\colon\ 3x + 4y + 2 = 0$ doğrusuna uzaklığını bulunuz.

Çözüm:

$$L = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3.2 + 4.3 + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 + 12 + 2|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

ÖRNEK 32: $A(-4,1)$ noktasının $d\colon\ x - 2y + 1 = 0$ doğrusuna uzaklığını bulunuz.

Çözüm:

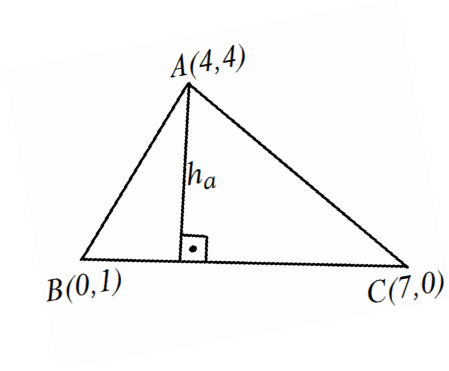
$$L = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-4 - 2.1 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

ÖRNEK 33: $A(2,-5)$ noktasının $d\colon\ 9x-3y-1=0$ doğrusuna uzaklığını bulunuz.

Çözüm:

$$L=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|9.2-3.(-5)-1|}{\sqrt{9^2+(-3)^2}}=\frac{|18+15-1|}{\sqrt{90}}=\frac{32}{3\sqrt{10}}$$

ÖRNEK 34: $A(4,4),\ B(0,1),\ C(7,0)$ köşe noktalarına sahip ABC üçgeninin a kenarına ait yüksekliğinin uzunluğunu bulunuz ($|h_a|$ =?).



Çözüm: h_a uzunluğu, A noktasının BC doğrusuna olan uzaklığıdır. O halde önce BC doğrusunun denklemini yazmalıyız.

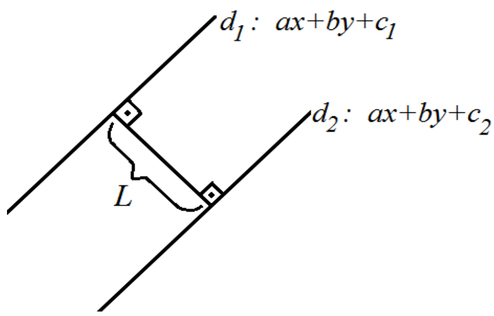
$$B(0,1),C(7,0)\Longrightarrow d_{BC}:\ \ \frac{x-0}{0-7}=\frac{y-1}{1-0}$$

$$\Longrightarrow d_{BC}:\ \ x+7y-7=0$$

$A(4,4)$ noktasının $d_{BC}:\ \ x+7y-7=0$ doğrusuna uzaklığı:

$$|h_a|=\frac{|4+7.4-7|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{25}{\sqrt{50}}=\frac{25}{5\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık



Paralel iki doğru arasındaki en kısa mesafe, bu iki doğru arasında çizilen dikmenin uzunluğudur. Paralel doğruların eğimleri eşit olduğuna göre doğru denklemlerinde x ve y nin katsayıları eşit, c sayıları farklıdır. buna göre d_1 ve d_2 arasındaki uzaklık:

$$\boxed{L=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

formülü ile hesaplanır. İkinci bir yol olarak; doğrulardan biri üzerinde bir nokta seçilir ve bu noktanın diğer doğruya olan uzaklığı hesaplanır.

ÖRNEK 35: $\left.\begin{matrix} d_1: & 3x+4y-3=0 \\ d_2: & 3x+4y+12=0 \end{matrix}\right\}$ doğruları arasındaki en kısa mesafeyi bulunuz.

Çözüm:

$$d_1:\ 3x+4y-3=0 \quad \rightarrow c_1=-3$$

$$d_2:\ 3x+4y+12=0 \quad \rightarrow c_2=12$$

$$L=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-3-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-15|}{\sqrt{25}}=\frac{15}{5}=3$$

ÖRNEK 36: $\left.\begin{matrix} d_1: & y=3x \\ d_2: & 6x-2y+5=0 \end{matrix}\right\}$ doğruları arasındaki en kısa mesafeyi bulunuz.

Çözüm:

$$d_1:\ y=3x \quad \rightarrow\ 3x-y=0 \quad \rightarrow c_1=0$$

$$d_2:\ 6x-2y+5=0\ \rightarrow\ 3x-y+\frac{5}{2}=0 \quad \rightarrow c_2=\frac{5}{2}$$

$$L=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|0-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{10}}=\frac{5}{2\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}}{20}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

2.yol: $d_1:\ y=3x$ üzerindeki bir nokta $(0,0)$ dır. Bu noktanın d_2 doğrusuna uzaklığı

$$L=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|6.0-2.0+5|}{\sqrt{6^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{40}}=\frac{5}{2\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}}{20}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

ÖRNEK 37: $\left.\begin{matrix} d_1: & x-2y-1=0 \\ d_2: & 2x-4y+3=0 \end{matrix}\right\}$ doğruları arasındaki uzunluğu bulunuz.

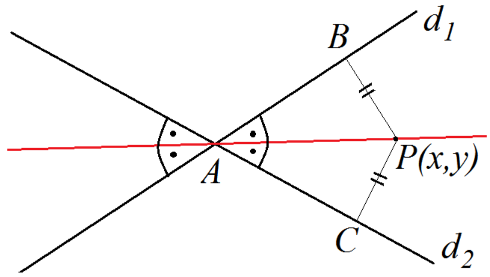
Çözüm:

$$d_1:\ x-2y-1=0 \quad \rightarrow c_1=-1$$

$$d_2:\ 2x-4y+3=0\ \rightarrow\ x-2y+\frac{3}{2}=0 \quad \rightarrow c_2=\frac{3}{2}$$

$$L=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|-1-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{\left|-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{5}{2\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Açıortay Denklemi



$\left.\begin{aligned} d_1:\quad a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ d_2:\quad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned}\right\}$ doğruları verilsin.

Şekilde de görüldüğü gibi açıortay üzerindeki P noktasının , açının kollarına olan uzaklıkları eşittir $(|PB| = |PC|)$. O halde açıortay denklemi

$$\boxed{\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{(a_1)^2 + (b_1)^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{(a_2)^2 + (b_2)^2}}}$$

şeklindedir. Bu ifadeyi aşağıdaki gibi de yazabiliriz:

$$\boxed{\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{(a_1)^2 + (b_1)^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{(a_2)^2 + (b_2)^2}}}$$

Buradan da anlaşılacağı gibi iki tane açıortay denklemi elde edilir. Biri verilen doğrular arasındaki dar açıya ait, diğeri de geniş açıya ait açıortay denklemleridir.

ÖRNEK 38: $\left.\begin{aligned} d_1:\quad 3x + 4y - 1 = 0 \\ d_2:\quad 8x - 6y + 5 = 0 \end{aligned}\right\}$ doğrularının açıortay denklemlerini yazınız.

Çözüm:

$$\frac{3x + 4y - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \pm\frac{8x - 6y + 5}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}}$$

$$\frac{3x + 4y - 1}{\sqrt{25}} = \pm\frac{8x - 6y + 5}{\sqrt{100}}$$

$$\underset{(2)}{\frac{3x + 4y - 1}{5}} = \pm\frac{8x - 6y + 5}{10}$$

$$2(3x + 4y - 1) = \pm(8x - 6y + 5)$$

$$6x + 8y - 2 = \pm(8x - 6y + 5)$$

<u>1. açıortay denklemi:</u>

$6x + 8y - 2 = 8x - 6y + 5$

$6x - 8x + 8y + 6y - 2 - 5 = 0$

$-2x + 14y - 7 = 0$

<u>2. açıortay denklemi:</u>

$6x + 8y - 2 = -8x + 6y - 5$

$6x + 8x + 8y - 6y - 2 + 5 = 0$

$14x + 2y + 3 = 0$

ÖRNEK 39: $\left.\begin{array}{ll} d_1: & 2x - y + 3 = 0 \\ d_2: & x + 2y - 4 = 0 \end{array}\right\}$ doğrularının açıortay denklemlerini yazınız.

Çözüm:

$$\frac{2x - y + 3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \pm\frac{x + 2y - 4}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$$\frac{2x - y + 3}{\sqrt{5}} = \pm\frac{x + 2y - 4}{\sqrt{5}}$$

$$2x - y + 3 = \pm(x + 2y - 4)$$

<u>1. açıortay denklemi:</u>

$2x - y + 3 = x + 2y - 4$

$2x - x - y - 2y + 3 + 4 = 0$

$x + 3y + 7 = 0$

<u>2. açıortay denklemi:</u>

$2x - y + 3 = -x - 2y + 4$

$2x + x - y + 2y + 3 - 4 = 0$

$3x + y - 1 = 0$

SORULAR

1) Dik koordinat sisteminde $A(m+3, n-1)$ noktası, IV. Bölgede ise $B(m,n)$ noktası nedir?

2) $A(-3,7)$ ve $B(5,1)$ noktaları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

3) $A(-1,3)$ noktasının orjine uzaklığı kaç birimdir?

4) $A(1,4)$ ve $B(3,-10)$ noktaları veriliyor. $|AB|$'nin orta noktasının orjine uzaklığı kaç birimdir?

5) Köşelerinin koordinatları; $A(6,7), B(-1,2)\ C(7,4)$ olan üçgenin V_a kenarortayının denklemi ve uzunluğu nedir?

6) Köşe noktalarının koordinatları, $A(-4,5)$, $B(-2,7)$, $C(6,10)$, $D(a,b)$ olan $ABCD$ paralelkenarında D noktasının koordinatları nedir?

7) Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları $A(5,4), B(-1,2)\ ve\ C(a,b)$ olan ABC üçgeninin ağırlık merkezinin koordinatları $G(4,3)$ ise $a+b=?$

8) Köşe noktalarının koordinatları $A(-2,6)$, $B(3,-1)$ ve $C(4,5)$ olan ABC üçgeninin alanı kaç birim karedir?

9) $A(1,-2)$ ve $B(p,3)$ noktalarından geçen doğru x-ekseni ile pozitif yönde 45 derecelik açı yaptığına göre $p=?$

10) $A(-2,3)$, $B(1,-3)$, $C(5,1)$ ve $D(1,k)$ noktaları veriliyor. $AB \parallel CD$ ise $k=?$

11) $A(2p-1,4)$ ve $B(p+3,2)$ noktalarından geçen doğru x-eksenine dik ise $p=?$

12) Eğimi -3 olan ve $A(-1,2)$ noktasından geçen doğrunun denklemi nedir?

13) $A(-3,2)$ ve $B(1,-6)$ noktalarında geçen doğrunun denklemi nedir?

14) $2x-y+4=0$ ve $x+y+2=0$ doğrularının kesim noktası nedir?

15) $2x-5y-4=0$ doğrusuna paralel olan ve $A(3,4)$ noktasından geçen doğrunun denklemi nedir?

16) Analitik düzlemde $d_1:\ (a-3)x+y-1=0$

$d_2:\ (a+2)x-2y+5=0$

doğruları veriliyor. $d_1 \parallel d_2$ ise $a=?$

17) Denklemleri $(m+2)x+4y-2=0$ ve $3x-(2n+1)y+1=0$ olan doğrular çakışık $ise\ m+n=?$

18) $A(-2,3)$ noktasından geçen ve $d_1:\ 3x-y+4=0$ doğrusuna dik olan d_2 doğrusunun denklemi nedir?

19) d_1: $(m+2)x-2y+1=0$ ve d_2: $3x+(2m-1)y+2=0$ denklemleri ile verilen doğrular birbirine dik ise $m=$?

20) d_1: $4x-2y+1=0$ ve d_2: $x+3y+2=0$ doğruları arasındaki dar açı kaç derecedir?

21) d_1: $3x-y=5$ ve d_2: $4x-2y=10$ doğruları arasındaki geniş açı kaç derecedir?

22) $A(-3,5)$ noktasının $4x-3y+12=0$ doğrusuna uzaklığı A' ise $|AA'|=$?

23) Analitik düzlemde $A(3,-2)$ noktasının $-4x+3y+3=0$ doğrusuna uzaklığı kaç birimdir?

24) $A(-4,3)$ noktasının d doğrusuna göre simetriği $B(2,-5)$ noktası ise $|AB|=$?

25) Dik koordinat düzleminde $A(a,-1)$, $B(a+3,8)$ ve $C(-3,a-1)$ noktalarının doğrusal olabilmesi için a kaç olmalıdır?

------------------------------------ ◈ ------------------------------------

FONKSİYONLAR

Tanım: :A ve B boş olmayan iki küme olsun. A’nın her elemanını B’nin sadece bir tek elemanı ile eşleyen kurala “ A’dan B’ye bir *fonksiyon*” denir.

$f\colon A \to B$ veya $A \xrightarrow{f} B$ şeklinde gösterilir. A kümesine ait bir x elemanının f fonksiyonu altındaki görüntüsü *f(x)* ile gösterilir. Burada

A → Tanım kümesi,

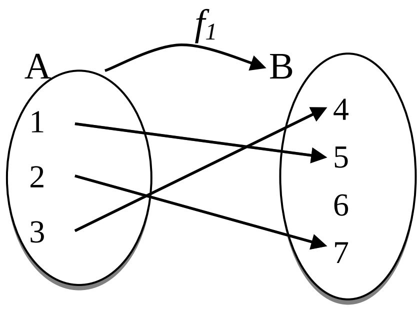
B → Değer kümesi,

f(A)→ Görüntü kümesidir. Görüntü kümesini şu şekilde de yazabiliriz:

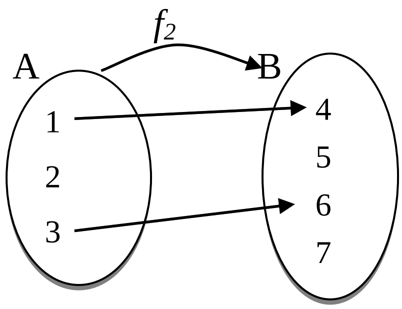
$$f(A) = \{y \;:\; y = f(x),\; x \in A\}$$

Not: $y = f(x)$ ifadesinde x keyfi değerler alabildiğinden “bağımsız değişken” , y ise x’e bağlı değerler aldığı için “bağımlı değişken” adını alır.

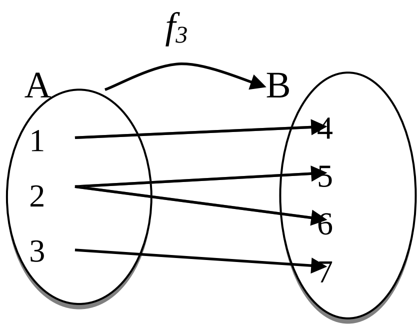
ÖRNEK 1: Aşağıda verilen ifadelerin bağıntı ve fonksiyon olma durumlarını inceleyiniz.



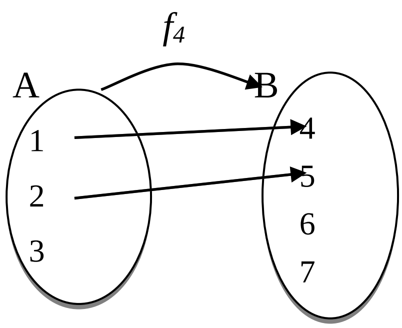
*f*1 , bağıntı + fonksiyon



*f*2, bağıntı + fonksiyon değil



*f*3, bağıntı + fonksiyon değil



*f*4, bağıntı + fonksiyon değil

NOT: Her fonksiyon bir bağıntıdır ancak her bağıntı bir fonksiyon olmayabilir.

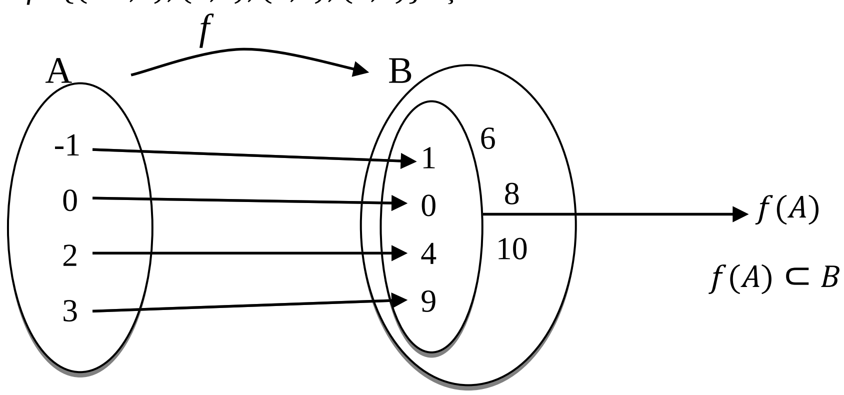
ÖRNEK 2: A= $\{-1,\ 0,2,3\}$, B= $\{0,1,4,6,8,9,10\}$ kümeleri arasında $f: A \to B$, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun görüntü kümesini yazınız.

Çözüm: Çözüm için A kümesindeki her bir elemanın $f(x) = x^2$ kuralına göre görüntüsü bulunur.

$f: A \to B$

$$\left.\begin{array}{l} x \to f(x) = x^2 \\ -1 \longrightarrow f(-1) = (-1)^2 = 1 \\ 0 \longrightarrow f(0) = (0)^2 = 0 \\ 2 \longrightarrow f(2) = (2)^2 = 4 \\ 3 \longrightarrow f(3) = (3)^2 = 9 \end{array}\right\} f(A) = \{0, 1, 4, 9\}$$

Bu fonksiyonu f= $\{(-1,1), (0,0), (2,4), (3,9)\}$ şeklinde de ifade edebiliriz.



Fonksiyonlarda Tanım Kümesi

Bir fonksiyonun tanım kümesi, bu fonksiyonda bağımsız değişken olarak kullanılabilecek değerlerin kümesidir. Diğer bir deyişle bilinmeyenlerin yerine kullanılabilecek değerlerin kümesidir. Tanım kümesi bulunurken aşağıdaki hususlara dikkat edilmelidir.

1) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
   şeklindeki polinom fonksiyonların tanım kümesi reel sayılar kümesi ℝ dir.
2) Kesirli fonksiyonlar paydayı “0” yapan noktalarda tanımsızdır. Yani paydayı sıfır yapan değerler tanım kümesinden çıkarılır.
3) a) $f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$, $n \in N$ için $g(x) \geq 0$ olmalıdır.

   b) $f(x) = \sqrt[2n+1]{g(x)}$, $n \in N$ için $f(x)$ ile $g(x)$’in tanım kümesi aynıdır.
4) $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ için $h(x)>0$, $h(x) \neq 1$, $g(x)>0$ olmalıdır.

ÖRNEK 3: $f(x) = 4x^2 + 5x - 7$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: Bu fonksiyon yukarıdaki 1.maddeye uygun olup tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.

ÖRNEK 4: $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 4$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: Tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.

ÖRNEK 5: $f(x) = \frac{x^2-x+4}{x-7}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: Paydayı "0" yapan x=7 değeri için tanımsız olacağından

Tanım Kümesi = $\mathbb{R} - \{7\}$ dir.

ÖRNEK 6: $f(x) = \frac{5x-4}{x^2-9}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: $x^2 - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 3$

Tanım Kümesi= $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

ÖRNEK 7: $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x(x^2+2x-8)}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: $x(x^2 + 2x - 8) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \quad \vee x^2 + 2x - 8 = 0$

$\Longrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -4$

Tanım Kümesi= $\mathbb{R} - \{-4, 0, 2\}$

ÖRNEK 8: $f(x) = \sqrt{3x - 15}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: $3x - 15 \geq 0$ olmalı.

$3x - 15 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x \geq 15 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 5$

Tanım kümesi = $[5, +\infty)$ veya Tanım Kümesi = $\mathbb{R} - (-\infty, 5)$

ÖRNEK 9: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 15}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: $x^2 - 2x - 15 \geq 0$ olmalı.

$x^2 - 2x - 15 = 0$ denleminin kökleri $x = -3$ ve $x = 5$ dir. Buna göre $x^2 - 2x - 15 \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan aralıkları bulmak için işaret tablosundan yararlanacağız:

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x^2 - 2x - 15$		+	0	−	0	+	

Tanım kümesi = $(-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$ veya Tanım Kümesi = $\mathbb{R} - (-3, 5)$

ÖRNEK 10: $f(x) = \log_{x-2} 7 - x$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: $\quad x - 2 \geq 0\,, \quad x - 2 \neq 1\,, \quad 7 - x > 0$ olmalı.

$$x \geq 2\,, \quad x \neq 3\,, \quad x < 7$$

Tanım kümesi $= (2,3) \cup (3,7)$

SORU 1: $f(x) = \frac{4x-\sqrt{x+5}}{\sqrt{x^2-4}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

SORU 2: $f(x) = \frac{\log(6-2x)+\sqrt{x^2+4x-5}}{x}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

SORU 3: $f(x) = \sqrt[4]{\frac{2x+1}{x-2}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

SORU 4: $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+6}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Fonksiyon Çeşitleri

Birim fonksiyon: Her elemanı kendisine dönüştüren fonksiyondur ve genellikle I ile gösterilir.

$$I:\ A \to A$$
$$x \to I(x) = x$$

Sabit fonksiyon: Tanım kümesindeki her elemanı, görüntü kümesindeki aynı elemana dönüştüren fonksiyondur.

$$f:\ A \to B$$
$$x \to f(x) = c\ , \qquad (c \in B)$$

Artan ve azalan fonksiyon: $f:\ A \to B$ ve $S \subset A$ olsun.

$\forall x_1, x_2 \in S$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ ise f, S üzerinde *artan fonksiyondur*.

$\forall x_1, x_2 \in S$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ ise f, S üzerinde *azalan fonksiyondur*.

Not: Bir fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkta tersi vardır.

ÖRNEK 11: $f\colon \mathbb{Z}^{+} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun artanlık ve azalanlık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: Tanım kümesi pozitif tamsayılar olduğuna göre sıra ile bu değerleri verelim:

$$\left.\begin{array}{lll} x = 1 & \text{için} & f(1) = \frac{1}{1} = 1 \\ x = 2 & \text{için} & f(2) = \frac{1}{2} = 0{,}5 \\ x = 3 & \text{için} & f(3) = \frac{1}{3} = 0{,}33\ldots \\ x = 4 & \text{için} & f(4) = \frac{1}{4} = 0{,}25 \\ \vdots & & \vdots \end{array}\right\} \quad f(x) = \frac{1}{x} \ \ \mathbb{Z}^{+} \ \text{için azalan fonksiyondur.}$$

ÖRNEK 12: $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun artanlık ve azalanlık durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{lll} \vdots & & \vdots \\ x = -2 & \text{için} & f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3 \\ x = -1 & \text{için} & f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \\ x = 0 & \text{için} & f(0) = (0)^2 - 1 = 1 \\ x = 1 & \text{için} & f(1) = (1)^2 - 1 = 0 \\ x = 2 & \text{için} & f(2) = (2)^2 - 1 = 3 \\ x = 3 & \text{için} & f(3) = (3)^2 - 1 = 8 \\ \vdots & & \vdots \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (-\infty, 0) \text{ aralığında azalan fonksiyon} \\ (0, +\infty) \text{ aralığında artan fonksiyon} \end{array}$$

ÖRNEK 13: $f(x) = x^2 — 4x + 1$ fonksiyonunun artanlık ve azalanlık durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{lll} \vdots & & \vdots \\ x = -1 & \text{için} & f(-1) = (-1)^2 — 4.(-1) + 1 = 6 \\ x = 0 & \text{için} & f(0) = (0)^2 — 4.(0) + 1 = 1 \\ x = 1 & \text{için} & f(1) = (1)^2 — 4.(1) + 1 = -2 \\ x = 2 & \text{için} & f(2) = (2)^2 — 4.(2) + 1 = -3 \\ x = 3 & \text{için} & f(3) = (3)^2 — 4.(3) + 1 = -2 \\ x = 4 & \text{için} & f(4) = (4)^2 — 4.(4) + 1 = 1 \\ \vdots & & \vdots \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (-\infty, 2) \text{ aralığında azalan fonksiyon} \\ (2, +\infty) \text{ aralığında artan fonksiyon} \end{array}$$

NOT: Bir fonksiyonun artan ya da azalan olduğu aralıkları bulmak için her zaman yukarıdaki örneklerde olduğu gibi sayı değeri vermek çok da kullanışlı değildir. Türevden yararlanılarak bu aralıklar daha pratik olarak bulunabilir. Henüz türev konusu verilmediği için şimdilik bu şekilde örneklendirilmiştir.

Tek ve çift fonksiyon: $f\colon A \to B$ ve $y = f(x)$ olsun.

$\forall\, x, -x \in \mathrm{A}$ için $f(-x) = f(x) \quad \Longrightarrow f,\ \textit{çift fonksiyondur}.$

$\forall\, x, -x \in \mathrm{A}$ için $f(-x) = -f(x) \quad \Longrightarrow f,\ \textit{tek fonksiyondur}.$

Yani bir fonksiyonda bilinmeyen sayı olarak aynı sayının negatifi ve pozitifi kullanıldığında;

- Sonuç değişmiyorsa çift fonksiyondur.
- Ters işaretli sonuçlar bulunuyorsa tek fonksiyondur
- Birbirinden farklı sonuçlar bulunuyorsa ne tek ne de çift fonksiyondur.

NOT: Tek fonksiyonun grafiği orijine göre simetriktir.
Çift fonksiyonun grafiği y-eksenine göre simetriktir.

ÖRNEK 14: $f(x) = x^2 - 3$ fonksiyonunun tek veya çift olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: $f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = f(x) \Longrightarrow f,$ çift fonksiyondur.

Veya sayı değeri vererek şu şekilde buluruz:

$$\left.\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1 \\ f(-2) &= (-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f,\ \text{çift fonksiyondur.}$$

ÖRNEK 15: $f(x) = \frac{2x^3 - 4x}{6}$ fonksiyonunun tek veya çift olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: $f(-x) = \frac{2(-x)^3 - 4(-x)}{6} = \frac{-2x^3 + 4x}{6} = \underbrace{-\frac{2x^3 - 4x}{6}}_{-f(x)} \Longrightarrow f,$ tek fonksiyondur.

Veya sayı değeri vererek şu şekilde buluruz:

$$\left.\begin{aligned} f(2) &= \frac{2(2)^3 - 4(2)}{6} = \frac{16-8}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ f(-2) &= \frac{2(-2)^3 - 4(-2)}{6} = \frac{-16+8}{6} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f,\ \text{tek fonksiyondur.}$$

ÖRNEK 16: $f(x) = x^2 - 2x + 5$ fonksiyonunun tek veya çift olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: $f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) + 5 = x^2 + 2x + 5 \implies$ *f*, ne tek ne de çifttir

Veya sayı değeri vererek şu şekilde buluruz:

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = 3^2 - 2.3 + 5 = 9 - 6 + 5 = 8 \\ f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) + 5 = 9 + 6 + 5 = 20 \end{array}\right\} \implies f, \text{ ne tek ne de çifttir}$$

SORU 5: Aşağıdaki fonksiyonların tek veya çift olup olmadığını inceleyiniz

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = x^4 + x^2 - 7$

d) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1$

Periyodik fonksiyon: $f: A \to B$ ve $y = f(x)$ olsun. Eğer $f(x+T) = f(x)$ olacak şekilde bir T sayısı varsa *f*, *periyodik fonksiyondur*. Bu T sayısına fonksiyonun *periyodu* denir.

f, periyodik bir fonksiyon ve periyodu T olsun. Bu durumda $k \in \mathbb{Z}$ ve $k \neq 0$ olmak üzere $k.T$ sayıları da *f* fonksiyonu için birer periyottur. En küçük periyoda ise "*esas periyot*" denir.

ÖRNEK 17: $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm: $f(x+T) = f(x)$

$\sin(x+T) = \sin x$

$\sin(x+T) = \sin(x+2\pi)$(bir açıya 2π eklemek sinüs değerini değiştirmez)

$x + T = x + 2\pi$

$T = 2\pi$

Benzer şekilde $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun periyodu da $T = 2\pi$ dir.

ÖRNEK 18: $f(x) = \cos 3x$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm: $f(x+T) = f(x)$

$\cos 3(x+T) = \cos 3x$

$\cos(3x+3T) = \sin(3x+2\pi)$(bir açıya 2π eklemek kosinüs değerini değiştirmez)

$3x + 3T = 3x + 2\pi$

$3T = 2\pi \Longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{3}$

Polinom fonksiyon: $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-3}x^{n-3} + \ . \ . \ . \ + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ Şeklinde tanımlı fonksiyonlara "*polinom fonksiyon*" denir. Burada;

$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-3},\ .\ .\ .\ , a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0$ sayıları reel sayılar olup,polinomun katsayılarıdır. *n* ise pozitif tamsayı olup, polinomun derecesidir.

$y = 3x^2 - 4x + 1\ ,\quad f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 4\ ,\quad P(x) = \frac{2x^4}{3} + \frac{x}{4} - 6$

fonksiyonları birer polinom fonksiyon örneğidir.

Kesirli rasyonel fonksiyon: $P(x)$ve $Q(x)$ iki polinom fonksiyon olmak üzere $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$şeklinde tanımlı fonksiyonlara "*kesirli rasyonel fonksiyon*" denir. Burada paydanın sıfır olmaması gerektiğine dikkat edilmelidir. Yani;

$$\text{Tanım kümesi} = \mathbb{R} - \{\text{paydayı sıfır yapan değerler}\}$$

şeklindedir. Böylece bir polinom fonksiyon

$$f:\ \mathbb{R} - \{\mathrm{x} : \mathrm{Q(x)} = 0\} \to \mathbb{R}\ ,\ \ f(x) = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

şeklinde tanımlanır. Aşağıdaki örnekler birer kesirli rasyonel fonksiyondur.

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+3x}\quad ,\quad y = \frac{x^3+5}{2x-1}\quad ,\quad y = \frac{x-1}{2x^2+4}$$

İrrasyonel fonksiyon: Rasyonel olmayan fonksiyonlardır. Ya da iki polinomun bölümü şeklinde yazılamayan fonksiyonlardır. Aşağıda bazı irrasyonel fonksiyon örnekleri verilmiştir.

$$y = 2x - \sqrt{x}\quad ,\quad y = \frac{\sqrt{3x^2-4}}{x-1}\quad ,\quad y = \frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{1-x^2}}\quad ,\quad y = sinx + cos3x, \dots$$

Burada bilinmeyen terimin (x'in) kök içinde kullanılmış olmasına dikkat ediniz. Örneğin $y = \sqrt{5}\, x + 4$ fonksiyonu irrasyonel değildir. Çünkü bilinmeyen terim (x) kök içinde kullanılmamıştır. Benzer şekilde $y = \log_4 7 + 3x - 5$ fonksiyonu irrasyonel değildir ama $y = \log_3(x + 7)$ fonksiyonu irrasyoneldir. O halde bilinmeyen değişkenin (x'in) nerede kullanıldığına dikkat ederek irrasyonel olup olmadığına karar veririz.

NOT: $\left.\begin{array}{l}\text{Polinom fonksiyon}\\ \text{Kesirli rasyonel fonksiyon}\\ \text{İrrasyonel fonksiyon}\end{array}\right\}$ Cebirsel fonksiyonlar

$\left.\begin{array}{l}\text{Üstel fonksiyon}\\ \text{Logaritmik fonksiyon}\\ \text{Trigonometrik fonksiyon}\\ \text{Terstrigonometrik fonksiyon}\end{array}\right\}$ Cebirsel olmayan fonksiyonlar(Transandant)

Birebir (1:1) fonksiyon: $f : A \to B$, $y = f(x)$ olsun.

$\forall\, a, b \in A$ için $f(a) = f(b)$ iken $a = b$ ise f, $1:1$ fonksiyondur.

Veya,

$\forall\, a, b \in A$ için $a \neq b$ iken $f(a) \neq f(b)$ ise f, $1:1$ fonksiyondur.

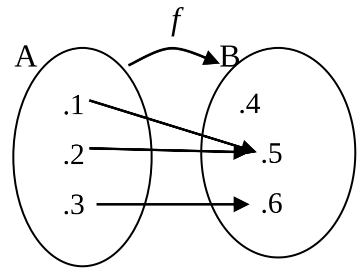
Örten fonksiyon: $f : A \to B$, $y = f(x)$ olsun.

Eğer $\forall\, y \in B$ *için* $y = f(x)$ olmak şartıyla $\exists\, x \in A$ varsa f *örten fonksiyondur*.

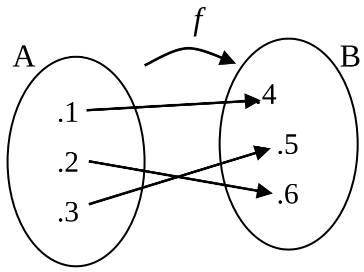
Başka bir deyişle görüntü kümesinde açıkta eleman kalmamışsa f örten fonksiyondur.

İçine fonksiyon: Örten olmayan fonksiyona *içine fonksiyon* denir. Başka bir deyişle görüntü kümesinde açıkta eleman bulunan fonksiyonlardır.

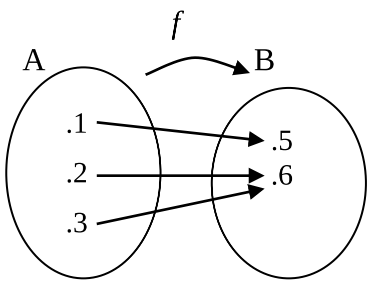
ÖRNEK 19: Aşağıdaki Venn şeması ile verilmiş bağıntıları inceleyiniz.



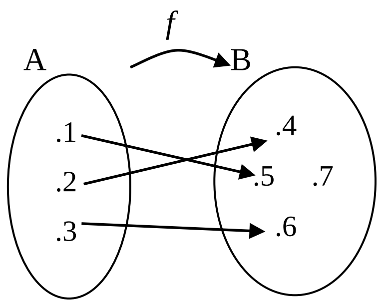
1:1 değil, örten değil (içine)



1:1 ve örten



1:1 değil, örten



1:1, örten değil (içine)

ÖRNEK 20: $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 4$ fonksiyonu 1:1 ve örten midir?

Çözüm: 1:1 lik: $f(a) = f(b)$

$$3a - 4 = 3b - 4$$

$$3a = 3b$$

$a = b \implies$ *f*, 1:1 fonksiyondur

Örtenlik: $y = 3x - 4$

$$3x = y + 4$$

$x = \frac{y+4}{3} \in \mathbb{R} \implies$ *f*, örten fonksiyondur

- Burada örtenlik hesaplanırken yapılan işlem, verilen fonksiyondan x'i yalnız bırakmak ve elde edilen sonucun tanım kümesine ait olup olmadığını kontrol etmektir.

ÖRNEK 21: $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5$ fonksiyonu 1:1 ve örten midir?

Çözüm: 1:1 lik: $f(a) = f(b)$

$$a^2 + 5 = b^2 + 5$$

$$a^2 = b^2$$

$a = \mp b$ $\begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$ $\implies$ *f*, 1:1 fonksiyon değildir

Örtenlik: $y = x^2 + 5$

$x^2 = y - 5$

$x = \sqrt{y-5} \Rightarrow y < 5$ değerleri için bu sayı reel sayı olmaz,

dolayısı ile *f*, örten fonksiyon değildir (içinedir).

ÖRNEK 22: $f\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{2}$ fonksiyonu 1:1 ve örten midir?

Çözüm: 1:1 lik: $f(a) = f(b)$

$$\frac{\sqrt{a}+1}{2} = \frac{\sqrt{b}+1}{2}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$a = b \implies$ *f*, 1:1 fonksiyondur

Örtenlik: $y = \frac{\sqrt{x}+1}{2}$

$$2y = \sqrt{x} + 1$$

$$\sqrt{x} = 2y - 1$$

$x = (2y-1)^2 \implies$ her *y* değeri için *x* sayısı pozitif reel sayı olur, dolayısı ile *f* örten fonksiyondur

ÖRNEK 23: $f\colon \mathbb{R}\text{-}\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}\text{-}\{-2\}$, $f(x) = \frac{3-2x}{x-1}$ fonksiyonu 1:1 ve örten midir?

Çözüm: 1:1 lik: $f(a) = f(b)$

$$\frac{3-2a}{a-1} = \frac{3-2b}{b-1}$$

$$b - 3 - 2ab + 2a = 3a - 3 - 2ab + 2b$$

$$3b - 2b = 3a - 2a$$

$b = a \implies$ *f*, 1:1 fonksiyondur

Örtenlik: $y = \frac{3-2x}{x-1}$

$$xy - y = 3 - 2x$$

$$xy + 2x = 3 + y$$

$$x(y+2) = 3 + y$$

$x = \frac{y+3}{y+2} \in R - \{1\} \implies f$ örten fonksiyondur.

Bu ifade $y = -2$ için tanımsızdır. Ancak görüntü kümesinden -2 sayısı çıkarıldığı için tanımsızlık ortadan kalkmıştır. Dolayısı ile fonksiyon örtendir.

SORU 6: $f:\mathbb{R}-\{3\}\longrightarrow\mathbb{R}-\{6\}$, $f(x)=\frac{6x+5}{x-3}$ fonksiyonu 1:1 ve örten midir?

SORU 7: $f:\mathbb{R}-\{-4\}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x-2}{x+4}$ fonksiyonu 1:1 ve örten midir?

Ters fonksiyon: $f:A\longrightarrow B$, $y=f(x)$ olsun. Eğer $f^{-1}:B\longrightarrow A$ ifadesi de bir fonksiyon ise bu fonksiyona *f'in ters fonksiyonu* denir.

f fonksiyonu ancak 1:1 ve örten ise f^{-1} fonksiyonu vardır. Eğer *f* fonksiyonu 1:1 ve örten değilse *f* fonksiyonunun tersinden söz edilemez.

ÖRNEK 24: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=3x-4$ fonksiyonu için varsa $f^{-1}(x)$ ters fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Bu fonksiyonun birebir ve örten olduğunu daha önce göstermiştik (ÖRNEK 20). Dolayısı ile tersi vardır.

$$y=3x-4\Longrightarrow\quad 3x=y+4$$
$$\Longrightarrow\quad x=\frac{y+4}{3}$$

$$f^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+4}{3}$$

ÖRNEK 25: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5$ fonksiyonunun varsa tersini bulunuz.

Çözüm: Bu fonksiyon 1:1 değil ve örten değil (ÖRNEK 21 de gösterildi), bu nedenle tersi yoktur.

ÖRNEK 26: $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{2}$ fonksiyonunun varsa tersini bulunuz.

Çözüm: Bu fonksiyon birebir ve örtendir (ÖRNEK22 de gösterildi). Dolayısı ile tersi vardır.

$$y=\frac{\sqrt{x}+1}{2}\Longrightarrow\quad\sqrt{x}+1=2y$$
$$\Longrightarrow\quad\sqrt{x}=2y-1$$
$$\Longrightarrow\quad x=(2y-1)^2$$
$$\Longrightarrow\quad x=4y^2-4y+1$$

$$f^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$$
$$x\longrightarrow f^{-1}(x)=4x^2-4x+1$$

ÖRNEK 27: $f : \mathbb{R}\text{-}\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}\text{-}\{-2\}$, $f(x) = \frac{3-2x}{x-1}$ fonksiyonu için varsa $f^{-1}(x)$ ters fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Bu fonksiyonun birebir ve örten olduğunu ÖRNEK 23'de göstermiştik. Dolayısı ile tersi vardır.

$$y = \frac{3-2x}{x-1} \Longrightarrow xy - y = 3 - 2x$$

$$\Longrightarrow x(y+2) = 3 + y$$

$$\Longrightarrow x = \frac{y+3}{y+2}$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$

$$x \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

NOT: f tersi olan bir fonksiyon olmak şartıyla şu pratik kural kullanılabilir:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{ise } f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

ÖRNEK 28: $f(x) = 5x + 4$, $f^{-1}(14) =?$

Çözüm: $y = 5x + 4 \Longrightarrow x = \frac{y-4}{5} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-4}{5}$

$$\Longrightarrow f^{-1}(14) = \frac{14-4}{5} = 2$$

SORU 8: Aşağıdaki fonksiyonların terslerini bulunuz. (Fonksiyonların tanım ve görüntü kümeleri verilmediği için, bu fonksiyonları 1:1 ve örten kabul ediniz)

a) $f(x) = 4x + 7 \qquad f^{-1}(x) =?$

b) $f(x) = \frac{9-2x}{4} \qquad f^{-1}(x) =?$

c) $y = 3x^2 - 5 \qquad y^{-1} =?$

d) $y = \frac{6x+3}{4x+8} \qquad y^{-1} =?$

e) $y = \sqrt{2x} + 3 \qquad y^{-1} =?$

f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2}}{3} \qquad f^{-1}(x) =?$

g) $y = \log_5(3x+2) \qquad y^{-1} =?$

h) $y = \ln x^2 \qquad y^{-1} =?$

i) $f(x) = \log_6(5x-1) \qquad f^{-1}(x) =?$

j) $f(x) = \ln(x^2 - 9) \qquad f^{-1}(x) =?$

Fonksiyonlarda Dört İşlem

f: A $\longrightarrow \mathbb{R}$ ve g: B $\longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için $A \cap B$ boş olmayan bir küme olsun.

1) $(f \mp g)(x) = f(x) \mp g(x)$ $\quad$ $f \mp g$: $(A \cap B) \longrightarrow \mathbb{R}$
2) $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ $\quad$ $f.g$: $(A \cap B) \longrightarrow \mathbb{R}$
3) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad$ $\frac{f}{g}$: $(A \cap B) - \{x : g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$
4) $(c.f)(x) = c.f(x)$ $\quad$ $c \in \mathbb{R}$

ÖRNEK 29: f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$ ve g: $\mathbb{R} - \{4\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - 4$ fonksiyonları veriliyor. Aşağıda istenenleri bulunuz.

a) $(f + g)(x) = ?$
b) $(f - 5g)(x) = ?$
c) $(f.g)(x) = ?$
d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = ?$

Çözüm:

a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 4x + x - 4 = x^2 - 3x - 4$
b) $(f - 5g)(x) = f(x) - 5.g(x) = (x^2 - 4x) - 5.(x - 4) = x^2 - 4x - 5x + 20$
$= x^2 - 9x + 20$
c) $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x^2 - 4x).(x - 4) = x^3 - 4x^2 - 4x^2 + 16x$
$= x^3 - 8x^2 + 16x$
d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-4x}{x-4} = \frac{x(x-4)}{x-4} = x$

ÖRNEK 30: f: $\{1,3\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5$ ve f: $\{-2,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 1$ fonksiyonları veriliyor. $4f + g$ fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

Çözüm: $4f + g$ fonksiyonunun tanım kümesi $\{1,3\} \cap \{-2,1\} = \{1\}$ dir. Böylece

$4f + g$: $\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ olur. Dolayısı ile sadece 1 sayısının görüntüsü vardır:

$$(4f + g)(1) = 4.f(1) + g(1) = 4.(1^2 + 5) + (2.1 - 1) = 24 + 1 = 25$$

ÖRNEK 31: $f(x)=\frac{2\sqrt{x}-5x^2+3}{2}$ ve $g(x)=x^2-4x+7$ fonksiyonları veriliyor.

a) $(f+g)(4)=?$

b) $f(9)+2.g(-3)=?$

c) $2f(0)-3g(1)=?$

Çözüm:

a) $(f+g)(4)=f(4)+g(4)=\frac{2\sqrt{4}-5.4^2+3}{2}+4^2-4.4+7$

$$=\frac{4-80+3}{2}+16-16+7$$

$$=\frac{-73}{2}+7=\frac{-59}{2}$$

b) $f(9)+2.g(-3)=\frac{2\sqrt{9}-5.9^2+3}{2}+2.[(-3)^2-4.(-3)+7]$

$$=\frac{6-405+3}{2}+2.[9+12+7]$$

$$=-198+56$$

$$=-142$$

c) $2f(0)-3g(1)=2.\frac{2\sqrt{0}-5.0^2+3}{2}-3.(1^2-4.1+7)$

$$=3-12$$

$$=-9$$

SORU 9: Aşağıdaki fonksiyonlar için istenenleri bulunuz.

$$f(x)=x^2+x-20\ ,\quad g(x)=x^2+2x-24$$

a) $(f+g)(x)=?$

b) $(2f-g)(x)=?$

c) $(f.g)(x)=?$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=?$

e) $(f.g)(-2)=?$

f) $f(2)+g(3)=?$

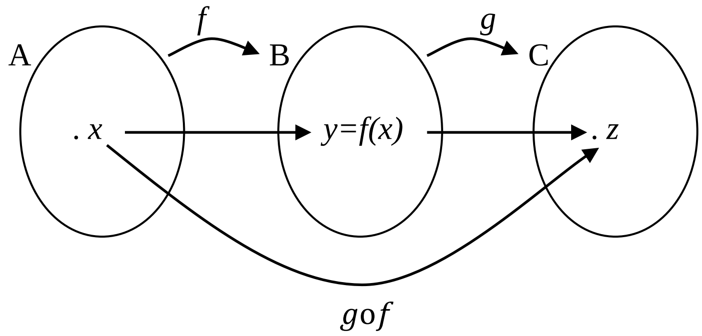
g) $\frac{2f(5)}{g(-4)}(x)=?$

Bileşke Fonksiyon

$f\colon A \to B$, $f(x) = y$ ve $g\colon B \to C$, $g(y) = z$ olmak üzere

$$gof\colon A \longrightarrow C \;, \qquad (gof)(x) = z$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f ile g'nin *bileşke fonksiyonu* denir ve gof ile gösterilir.



$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = z$$

ÖRNEK 32: f *ve* $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları için aşağıdaki bileşke fonksiyonları bulunuz.

a) $(fog)(x) =?$

b) $(gof)(x) =?$

Çözüm: a) $(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = 2x^2 - 5$

c) $(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x - 5) = (2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$

Bu örnekte de görüldüğü gibi $fog \neq gof$ dir.

ÖRNEK 33: f *ve* $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 8$ ve $g(x) = 3x + 7$ ise $(gof)(2) =?$

Çözüm: $(gof)(2) = g\big(f(2)\big) = g(2^3 - 8) = g(0) = 3.0 + 7 = 7$

ÖRNEK 34: $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $g(x) = x - 1$ fonksiyonları için istenenleri bulunuz.

a) $(gof)(x) = ?$

b) $(fog)(x) = ?$

c) $(fog^{-1})(4) = ?$

d) $(gof)\left(\frac{3}{2}\right)(x) = ?$

Çözüm:

a) $(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x^2 - 3x + 4) = 2x^2 - 3x + 4 - 1 = 2x^2 - 3x + 3$

b) $(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x - 1)$

$$= 2.(x-1)^2 - 3.(x-1) + 4$$
$$= 2(x^2 - 2x + 1) - 3x + 3 + 4$$
$$= 2x^2 - 4x + 2 - 3x + 7$$
$$= 2x^2 - 7x + 9$$

c) $g^{-1}(x) = x + 1,\quad (fog^{-1})(4) = f\big(g^{-1}(4)\big) = f(4+1) = f(5)$

$$= 2.5^2 - 3.5 + 4$$
$$= 39$$

d) $(gof)\left(\frac{3}{2}\right)(x) = g\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)(x) = g\left(2.\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3.\left(\frac{3}{2}\right) + 4\right)$

$$= g\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 4\right) = g(4) = 4 - 1 = 3$$

ÖRNEK 35: $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$, $g(x) = x - 2$, $h(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonları için istenenleri bulunuz.

a) $(fogoh)(x) = ?$

b) $(fohog)(x) = ?$

c) $(fohog)(6) = ?$

d) $(gofoh)(x) =$

e) $(hofog)(x) =$

f) $(hogof)(2) = ?$

g) $(h^{-1}og^{-1})(x) = ?$

Çözüm:

a) $(fogoh)(x) = f\left(g\big(h(x)\big)\right)$

$$= f\left(g\big(\sqrt{x}\big)\right)$$

$$= f\big(\sqrt{x}-2\big)$$

$$= \ 4.(\sqrt{x}-2)^2 - 4.\big(\sqrt{x}-2\big) + 1$$

$$= 4.\big(x - 4\sqrt{x} + 4\big) - 4\sqrt{x} + 8 + 1$$

$$= 4x - 16\sqrt{x} + 16 - 4\sqrt{x} + 9$$

$$= 4x - 20\sqrt{x} + 25$$

b) $(fohog)(x) = f\big(h(x-2)\big) = f(\sqrt{x-2})$

$$= 4(\sqrt{x-2}\,)^2 - 4\sqrt{x-2} + 1$$

$$= 4.(x-2) - 4\sqrt{x-2} + 1$$

$$= 4x - 8 - 4\sqrt{x-2} + 1$$

$$= 4x - 4\sqrt{x-2} - 7$$

c) $(fohog)(6) = f\left(h\left(\underbrace{g(6)}_{4}\right)\right) = f\left(\underbrace{h(4)}_{2}\right) = f(2) = 4.2^2 - 4.2 + 1$

$$= 16 - 8 + 1 = 9$$

d) $(gofoh)(x) = g(f\big(\sqrt{x}\big))$

$$= g(4x - 4\sqrt{x} + 1)$$

$$= 4x - 4\sqrt{x} + 1 - 2$$

$$= 4x - 4\sqrt{x} - 1$$

e) $(hofog)(x) = h\big(f(x-2)\big)$

$$= h[4.(x-2)^2 - 4(x-2) + 1]$$

$$= h[4(x^2 - 4x + 4) - 4x + 8 + 1]$$

$$= h(4x^2 - 16x + 16 - 4x + 9)$$

$$= h(4x^2 - 20x + 25)$$

$$= \sqrt{4x^2 - 20x + 25}$$

$$= \sqrt{(2x-5)^2}$$

$$= 2x - 5$$

f) $(hogof)(2) = h\left(g\left(\underbrace{f(2)}_{9}\right)\right) = h\left(\underbrace{g(9)}_{7}\right) = h(7) = \sqrt{7}$

g) $(h^{-1}og^{-1})(x) = ?$

$$h(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad h^{-1}(x) = x^2$$
$$g(x) = x - 2 \quad \Rightarrow \quad g^{-1}(x) = x + 2$$

$$\begin{aligned}(h^{-1}og^{-1})(x) &= h^{-1}(x+2) \\ &= (x+2)^2 \\ &= x^2 + 4x + 4\end{aligned}$$

NOT: Daha önce tanımlandığı gibi birim fonksiyon bir elemanı kendisine dönüştüren fonksiyondur. Buna göre

$$fof^{-1} = f^{-1}of = I$$

eşitliği vardır. O halde aşağıdaki iki durum yazılabilir:

$$fog = h \qquad\qquad fog = h$$
$$\underbrace{f^{-1}of}_{I}\, og = f^{-1}oh \qquad\qquad fo\,\underbrace{gog^{-1}}_{I} = hog^{-1}$$
$$\underbrace{Iog}_{g} = f^{-1}oh \qquad\qquad \underbrace{foI}_{f} = hog^{-1}$$
$$g = f^{-1}oh \qquad\qquad f = hog^{-1}$$

ÖRNEK 36: $(gof)(x) = x + 2$ ve $g(x) = \frac{x+3}{2}$ ise $f(x) = ?$

Çözüm: $gof = h \Rightarrow f = g^{-1}oh$, $g(x) = \frac{x+3}{2} \Rightarrow g^{-1}(x) = 2x - 3$

$$\begin{aligned}f(x) &= g^{-1}(h(x)) \\ &= g^{-1}(x+2) = 2.(x+2) - 3 = 2x + 4 - 3 = 2x + 1\end{aligned}$$

<u>2.yol:</u> $(gof)(x) = g(f(x)) = x + 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)+3}{2} = x + 2$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 2x + 1$$

ÖRNEK 37: $(gof)(x) = 5x + 8$ ve $f(x) = x + 1$ ise $g(x) = ?$

Çözüm: $gof = h \Rightarrow g = hof^{-1}$ $\qquad f(x) = x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1$

$$\begin{aligned}g(x) &= h(f^{-1}(x)) \\ &= h(x-1) = 5.(x-1) + 8 = 5x - 5 + 8 = 5x + 3\end{aligned}$$

2.yol: $(gofof^{-1})(x) = (5x+8)of^{-1}(x)$

$$g(x) = 5.f^{-1}(x) + 8$$

$$g(x) = 5.(x-1) + 8$$

$$g(x) = 5x + 3$$

ÖRNEK 38: $(fog)(x) = 4x + 6$ ve $f(x) = 2 - 3x$ ise $g(x) = ?$

Çözüm: $fog = h \Longrightarrow g = f^{-1}oh$, $f(x) = 2 - 3x \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{2-x}{3}$

$$g(x) = f^{-1}(4x+6)$$

$$g(x) = \frac{2-(4x+6)}{3} = \frac{2-4x-6)}{3} = \frac{-4x-4}{3}$$

ÖRNEK 39: $(fog)(x) = x + 5$ ve $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ ise $f(x) = ?$

Çözüm: $fog = h \Longrightarrow f = hog^{-1}$, $g(x) = \frac{x+2}{x-1} \Longrightarrow g^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1}$

$$f(x) = h\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1} + 5$$

$$f(x) = \frac{x+2+5x-5}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{6x-3}{x-1}$$

ÖRNEK 40: $(fog)(x) = x - 2$ ve $g(x) = \sqrt{x} + 3$ ise $f(x) = ?$

Çözüm: $fog = h \Longrightarrow f = hog^{-1}$, $g(x) = \sqrt{x} + 3 \Longrightarrow g^{-1}(x) = (x-3)^2$

$$f(x) = h((x-3)^2)$$

$$f(x) = (x-3)^2 - 2$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 - 2$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 7$$

ÖRNEK 41: $f^{-1}\left(\frac{2x+3}{x-2}\right) = x + 2$ ise $f(x) = ?$

Çözüm: $y = f(x) \Longrightarrow \mathrm{f}^{-1}(y) = x$

$f(x+2) = \frac{2x+3}{x-2}$ burada *x* yerine *x*-2 yazalım.

$$f(x-2+2) = \frac{2(x-2)+3}{(x-2)-2}$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-4}$$

ÖRNEK 42: $f(x) = \begin{cases} x-8 & ; \quad x \geq -2 \\ x^2-4 & ; \quad x < 2 \end{cases}$ ise $(fof)(5) = ?$

Çözüm: $5 \geq -2$ olduğundan $f(x) = x-8$ olup, $f(5) = 5-8 = -3$

$-3 < -2$ olduğundan $f(x) = x^2-4$ olup, $f(-3) = (-3)^2 - 4 = 5$

Yani $(fof)(5) = f\left(\underbrace{f(5)}_{-3}\right) = f(-3) = 5$

ÖRNEK 43: $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & ; \quad x \geq 0 \\ 1-3x & ; \quad x < 0 \end{cases}$ ise $(fof)(-2) = ?$

Çözüm: $-2 < 0$ olduğundan $f(x) = 1-3x$ olup, $f(-2) = 1 - 3.(-2) = 7$

$7 \geq 0$ olduğundan $f(x) = x^2+1$ olup, $f(7) = (7)^2 + 1 = 50$

Yani $(fof)(-2) = f\left(\underbrace{f(-2)}_{7}\right) = f(7) = 50$

Üstel Fonksiyon

$a \neq 1$ve $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = a^x$$

şeklinde tanımlı fonksiyona "*üstel fonksiyon*" denir ($a \neq 1$ olmasının nedeni $\forall x \in R$ için $1^x = 1$ olmasıdır).

Örneğin

$$f(x) = 7^x, \; g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x, \; h(x) = 5.3^{2x}, \; k(x) = 5^{x-4}, \; p(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x, q(x) = e^x$$

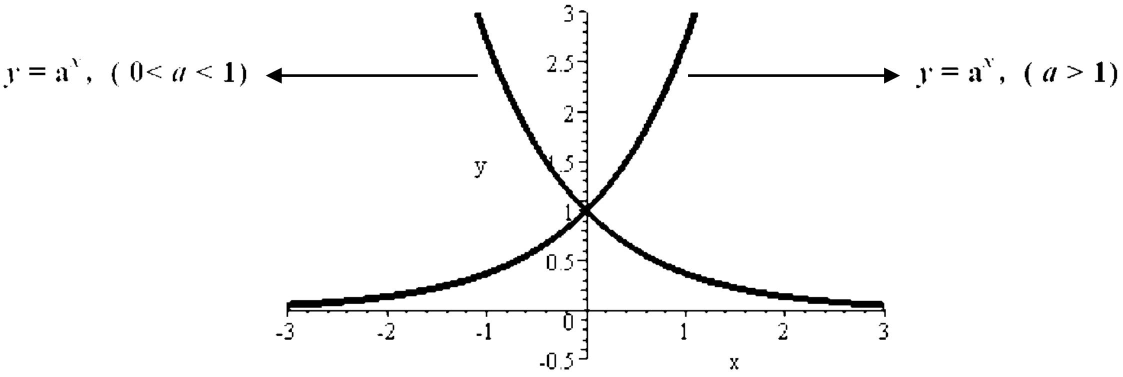
fonksiyonları birer üstel fonksiyondur.

Ancak

$f(x) = (-2)^x, \; g(x) = x^{cosx}, \; h(x) = x^3$

fonksiyonları üstel fonksiyon değildir.

Üstel fonksiyonların özelliklerini a sayısının $0 < a < 1$ ya da $a > 1$ olmasına göre iki kategoride inceleriz. Örneğin $a > 1$ durumunda $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonu artan, $0 < a < 1$ durumunda $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonu azalandır. Bu iki duruma ait grafikler aşağıda verilmiştir.



ÖRNEK 44: $y = 2^x$ ve $y = 2^{-x}$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Çözüm:

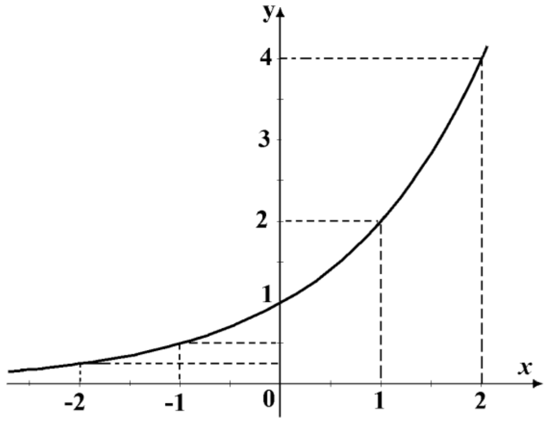
$y = 2^x \longrightarrow x = 0 \quad için \;\; y = 1$

$x = -1 \;\; için \;\; y = \dfrac{1}{2}$

$x = -2 \;\; için \;\; y = \dfrac{1}{4}$

$x = 1 \quad için \;\; y = 2$

$x = 2 \quad için \;\; y = 4$



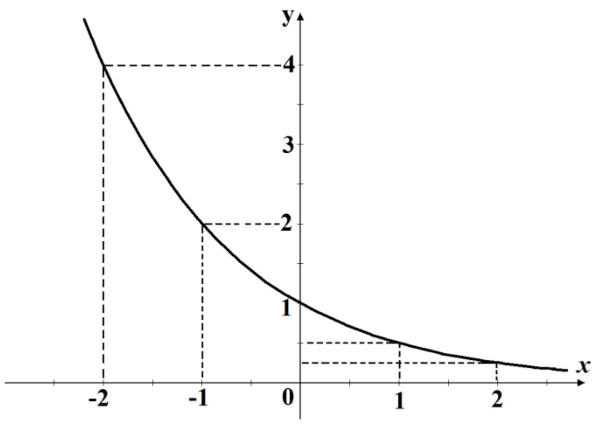
$y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \longrightarrow x = -2 \;\; için \;\; y = 4$

$x = -1 \;\; için \;\; y = 2$

$x = 0 \quad için \;\; y = 1$

$x = 1 \quad için \;\; y = \dfrac{1}{2}$

$x = 2 \quad için \;\; y = \dfrac{1}{4}$



Parçalı Tanımlı Fonksiyonlar

$f\colon\ A \to B$ ve A kümesinin alt kümeleri $S_1, S_2, \ldots\ldots, S_n$ olmak üzere;

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x); & x \in S_1 \\ f_2(x); & x \in S_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x); & x \in S_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlara "*parçalı tanımlı fonksiyon*" denir.

ÖRNEK 45: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 12; & x \in (-\infty, -4] \\ 2 - 3x \ ; & x \in (-4, 2) \\ 2x + 6 \ ; & x \in [2, +\infty) \end{cases}$

fonksiyonu için $f(4) + f(0) - f(-5) = ?$

Çözüm: $f(4) = 2.4 + 6 = 14$, $\quad f(0) = 2 - 3.0 = 2$, $\quad f(-5) = (-5)^2 - 12 = 13$

$$f(4) + f(0) - f(-5) = 14 + 2 - 13 = 3$$

ÖRNEK 46: $f(x) = \begin{cases} 2x - 3; & x > 2 \\ \frac{x+1}{x-3} \ ; & x \leq 2 \end{cases}$ ve $\quad g(x) = x^3 - x + 2$

olduğuna göre $\quad (6f + 3g)(0) = ?$

Çözüm: $\quad (6f + 3g)(0) = 6.f(0) + 3.g(0)$

$$= 6.\left(\frac{0+1}{0-3}\right) + 3.(0^2 - 0 + 2)$$

$$= 6.\left(\frac{1}{-3}\right) + 6$$

$$= 4$$

ÖRNEK 47: $f(x) = \begin{cases} x + 1\ ; & x \leq 1 \\ 3 - 2x; & x > 1 \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: $\quad \bullet(-\infty, 1]$ aralığında $y = x + 1$ doğrusunu çizeceğiz.

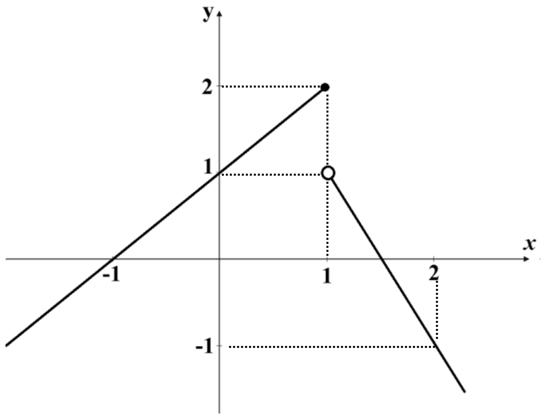
$x = 1$ için $y = 2$

$x = 0$ için $y = 1$

$\bullet(1, +\infty)$ aralığında $y = 3 - 2x$ doğrusunu çizeceğiz.

$x = 1$ için $y = 1$

$x = 2$ için $y = -1$



ÖRNEK 48: $f(x)=\begin{cases} 3x & ; \quad x\in(-\infty,1) \\ x^2-6x+9 & ; \quad x\in[1,5] \\ 6-x & ; \quad x\in(5,+\infty) \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz

Çözüm: •$(-\infty,1)$ aralığında $y=3x$ doğrusunu çizeceğiz.

$x=-1$ için $y=-3$

$x=0$ için $y=0$

$x=1$ için $y=3$

•$[1,5]$ aralığında $y=x^2-6x+9$ doğrusunu çizeceğiz.

$x=1$ için $y=4$

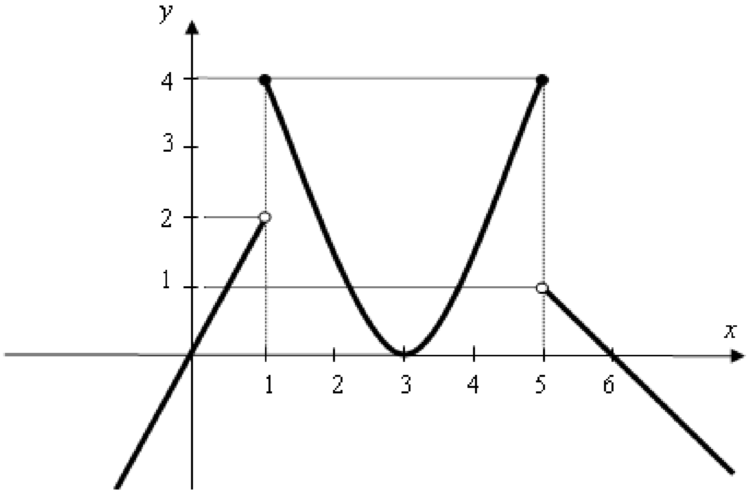
$x=3$ için $y=0$

$x=5$ için $y=4$

•$[5,+\infty)$ aralığında $y=6-x$ doğrusunu çizeceğiz.

$x=5$ için $y=1$

$x=6$ için $y=0$



SORU 10: $f(x)=\begin{cases}\cos x; & -\pi \le x \le 0\\ \sin x; & 0 < x \le \pi\end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

SORU 11: $f(x)=\begin{cases}2x-2\ ; & x\in(-\infty,0)\\ x^2\ ; & x\in[0,3)\\ x+1\ ; & x\in[3,+\infty)\end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

SORU 12: $f(x)=\begin{cases}x^2-ax; & x<-2\\ 3x-b\ ; & -2\le x<5\\ \frac{x+1}{x-3}\ ; & x\ge 5\end{cases}$ şeklindeki $f(x)$ fonksiyonunu için

$f(-3)+f(0)+f(7)=a-b$ olduğuna göre $a=$?

SORU 13: $f(x)=\begin{cases}x^2+1\ ; & x\ge 4\\ 4-x^2; & 0<x<4\\ 3^x\ ; & x\le 0\end{cases}$ fonksiyonu için $f(-2)=$? , $(fof)(0)=$?

Özel Parçalı Tanımlı Fonksiyonlar

1. **Mutlak Değer Fonksiyonu**
2. **İşaret (Signum) Fonksiyonu**
3. **Tam Değer Fonksiyonu**

Mutlak Değer Fonksiyonu

$A\subset\mathbb{R}$ ve $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|f(x)|=\begin{cases}f(x); & f(x)\ge 0\\ -f(x); & f(x)<0\end{cases}$$

şeklinde tanımlı parçalı fonksiyona "*mutlak değer fonksiyonu*" denir.

NOT: Mutlak değer fonksiyonunda, mutlak değerli kısımları sıfır yapan değerler fonksiyonun kritik noktalarıdır. Mutlak değer fonksiyonu incelenirken, bu kritik noktalara göre önce fonksiyon parçalı biçimde yazılır.

ÖRNEK 49: $f(x) = |x-3|$ fonksiyonunu parçalı tanımlı olarak yazınız.

Çözüm: $f(x) = |x-3| = \begin{cases} x-3\ ; & x-3 \geq 0 \\ -(x-3); & x-3 < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} x-3; & x \geq 3 \\ 3-x; & x < 3 \end{cases}$

ÖRNEK 50: $f(x) = |x^2-4|$ fonksiyonunu parçalı tanımlı olarak yazınız.

Çözüm: $|x^2-4| = 0 \implies x = \mp 2$ noktaları kritik noktalardır. Mutlak değerin içi ikinci dereceden bir ifade olduğu için, bu kritik değerlere göre işaret tablosu çizmeliyiz.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	−	0	+	

$$f(x) = |x^2-4| = \begin{cases} x^2-4\ ; & x \geq 2 \ ve \ x \leq -2 \\ -(x^2-4); & -2 < x < 2 \end{cases}$$

ÖRNEK 51: $f(x) = \sqrt{x^2} - 2|x-3|$ fonksiyonunu parçalı tanımlı olarak yazınız.

Çözüm: $f(x) = \sqrt{x^2} - 2|x-3|$ ise $f(x) = |x| - 2|x-3|$ olur. Dolayısı ile $x = 0$ ve $x = 3$ noktaları kritik noktalardır.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		−	0	+		+	
x − 3		−		−	0	+	

$$f(x) = \begin{cases} -x+2(x-3); & x < 0 \\ x+2(x-3); & 0 \leq x < 3 \\ x-2(x-3)\ ; & x \geq 3 \end{cases} \implies f(x) = \begin{cases} x-6\ ; & x < 0 \\ 3x-6; & 0 \leq x < 3 \\ -x+6\ ; & x \geq 3 \end{cases}$$

ÖRNEK 52: $f(x) = |x-1| + |x+1| - x$ fonksiyonunu parçalı tanımlı olarak yazınız.

Çözüm: Bu fonksiyon için kritik noktalar $x = 1$ ve $x = -1$ dir.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)-(x+1)-x; & x < -1 \\ -(x-1)+(x+1)-x; & -1 \le x < 1 \\ x-1+x+1-x \quad ; & x \ge 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x+1--x-1-x; & x < -1 \\ -x+1+x+1-x; & -1 \le x < 1 \\ x-1+x+1-x \quad ; & x \ge 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -3x\,; & x < -1 \\ 2-x; & -1 \le x < 1 \\ x \quad ; & x \ge 1 \end{cases}$$

ÖRNEK 53: $f(x) = |3-x| + x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: $|3-x| = \begin{cases} 3-x\ ; & 3-x \ge 0 \\ -(3-x); & 3-x < 0 \end{cases}$

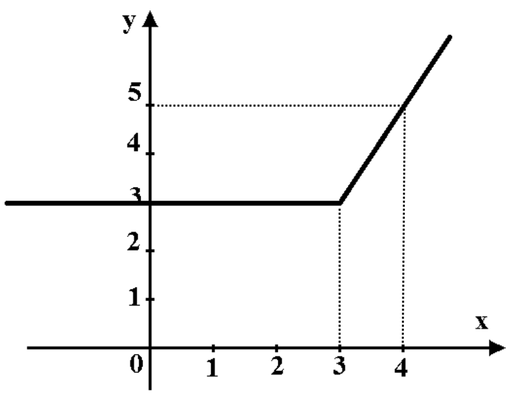
$|3-x| = \begin{cases} 3-x; & x \le 3 \\ -3+x; & x > 3 \end{cases}$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	0	$-$	

•$(-\infty, 3]$ aralığı için $y = 3 - x + x \Longrightarrow \boxed{y = 3}$

•$(3, +\infty)$ aralığı için $y = -3 + x + x \Longrightarrow \boxed{y = 2x - 3}$

$$\overbrace{\begin{matrix} x = 3 & için & y = 3 \\ x = 4 & için & y = 5 \end{matrix}}$$



ÖRNEK 54: $f(x) = |x-1| - |x+2| + 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

x	$-\infty$ — -2	-2 — 1	1 — $+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
	I	II	III

Tablodan elde edilen üç aralık için y fonksiyonunu oluşturalım.

I. $(-\infty,-2)$ aralığı için $y = -x + 1 + x + 2 + 1$

$$\boxed{y = 4}$$

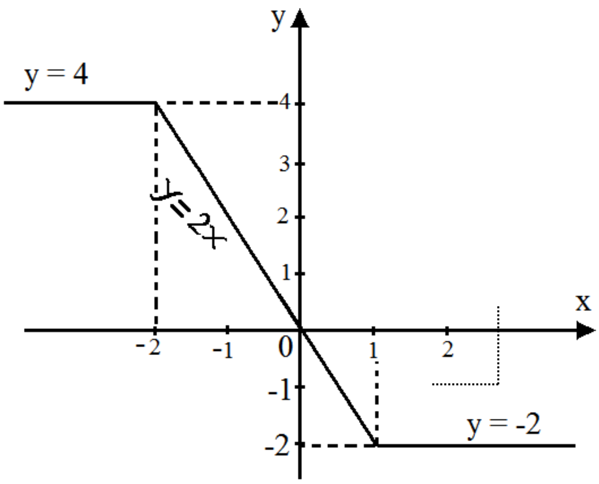
II. $[-2,1)$ aralığı için $y = -x + 1 - x - 2 + 1$

$$\boxed{y = -2x}\begin{cases} x = -2 \ \ için \ \ y = -4 \\ x = 0 \ \ \ için \ \ y = 0 \\ x = 1 \ \ \ için \ \ y = -2 \end{cases}$$

III. $[1,+\infty)$ aralığı için $y = x - 1 - x - 2 + 1$

$$\boxed{y = -2}$$

I. ve III. aralıkta sabit değerler olup x-eksenine paralel doğrular çizeceğiz. II. aralıkta ise bulduğumuz noktaları birleştiren bir doğru çizeceğiz. x'e verilen değerlerin ait olduğu aralıktan seçildiğine dikkat ediniz. Ayrıca kritik noktalar aralığa dahil olmasa dahi bu değerler verildiğine de dikkat ediniz.



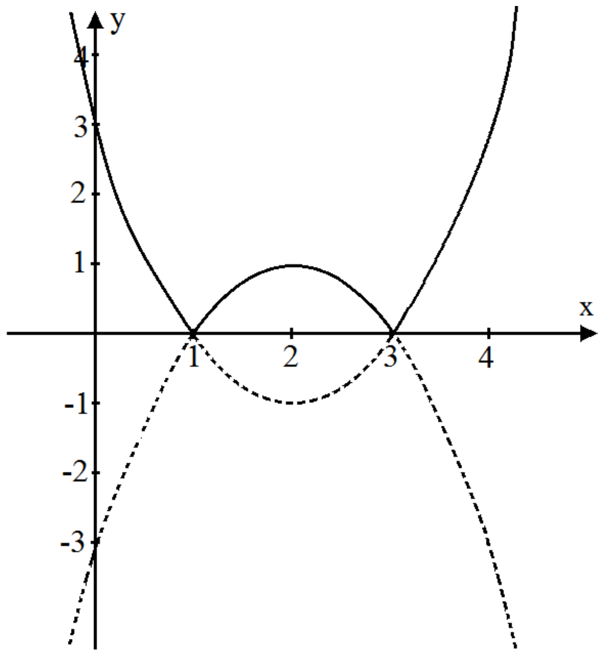
ÖRNEK 55: $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: $x^2 - 4x + 3 = 0$ denkleminin kökleri $x = 1$ ve $x = 3$ olduğundan bu iki nokta kritik noktadır.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		+	○	−	○	+	
		I		II		III	

I. ve III. aralıkta $y = x^2 - 4x + 3$ eğrisini çizeceğiz.

II. aralıkta ise $y = -x^2 + 4x - 3$ eğrisini çizeceğiz.



ÖRNEK 56: $f(x) = |1 - x| + |2 - x| + |3 - x|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Fonksiyonun kritik noktaları $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$\|1 - x\|$		+	○	−		−		−	
$\|2 - x\|$		+		+	○	−		−	
$\|3 - x\|$		+		+		+	○	−	
		I		II		III		IV	

I. $(-\infty, 1]$ için $y = 1 - x + 2 - x + 3 - x$

$$\boxed{y = -3x + 6} \longrightarrow \begin{cases} x = 1 & ise \ y = 3 \\ x = 0 & ise \ y = 6 \end{cases}$$

II. $(-\infty, 2]$ için $y = x - 1 + 2 - x + 3 - x$

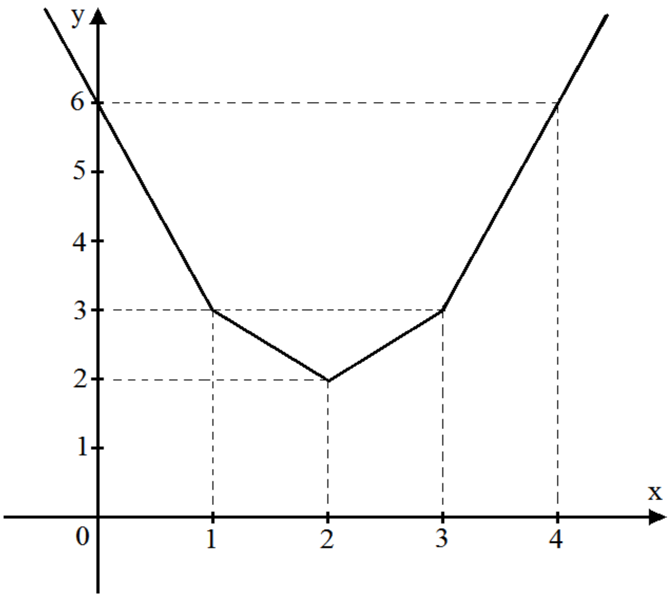
$$\boxed{y = 4 - x} \longrightarrow \begin{cases} x = 1 & ise \ y = 3 \\ x = 2 & ise \ y = 2 \end{cases}$$

III. $(2,3]$ için $y = x - 1 + x - 2 + 3 - x$

$$\boxed{y = x} \longrightarrow \begin{cases} x = 2 & ise \ y = 2 \\ x = 3 & ise \ y = 3 \end{cases}$$

IV. $(3, +\infty)$ için $y = x - 1 + x - 2 + x - 3$

$$\boxed{y = 3x - 6} \longrightarrow \begin{cases} x = 3 & ise \ y = 3 \\ x = 4 & ise \ y = 6 \end{cases}$$



SORU 14: $f(x) = |x - 3| + |2 - x| + x - 1$ ise $f(4) + f(2) + f(0) = ?$

SORU 15: $f(x) = 2 - |x - 3|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

SORU 16: $f(x) = |x - 2| - |x| + 2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

SORU 17: $f(x) = |x^2 - 4|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

SORU 18: $f(x) = |x^2 - x| + x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

SORU 19: $|x| + |y| = 2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

İşaret Fonksiyonu

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $Sgn: \ A \longrightarrow \{-1{,}0{,}1\}$ olmak üzere

$$Sgn\, f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ f(x) > 0 \\ 0 & ; \ f(x) = 0 \\ -1 & ; \ f(x) < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona "*işaret fonksiyonu*" veya "*signum fonksiyonu*" denir. Bir bakıma signum fonksiyonu, o fonksiyonun işaret tablosunun parçalı fonksiyona çevrilmiş halidir. Ancak işaret tablosunda " $-$ " ile gösterilen bölge "-1" olarak, "$+$ " ile gösterilen bölge "$+1$" olarak değerlendirilir.

ÖRNEK 57: $f(x) = Sgn\,(3x-6)$ fonksiyonunu parçalı olarak yazınız.

Çözüm:

$$Sgn\,(3x-6) = \begin{cases} 1 & ; \ 3x-6 > 0 \\ 0 & ; \ 3x-6 = 0 \\ -1 & ; \ 3x-6 < 0 \end{cases}$$

$$Sgn\,(3x-6) = \begin{cases} 1 & ; \ x > 2 \\ 0 & ; \ x = 2 \\ -1 & ; \ x < 2 \end{cases}$$

x	-∞	1	+∞
$\lvert 1-x \rvert$	$+1$	0	-1

ÖRNEK 58: $f(x) = Sgn\,(x^2-4)$ fonksiyonunu parçalı olarak yazıp, grafiğini çiziniz.

Çözüm:

x	-∞	-2		2	+∞
$Sgn\,(x^2-4)$	$+1$	0	-1	0	$+1$

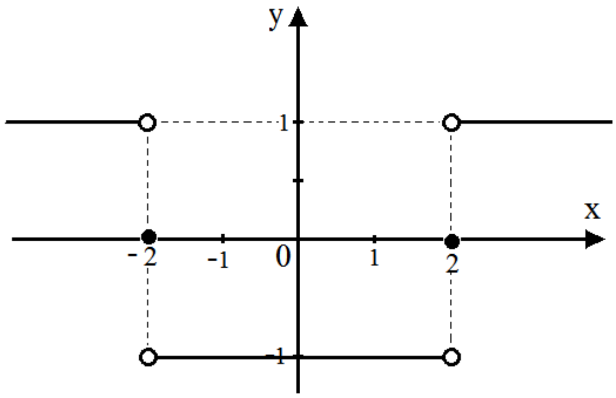
$$f(x) = Sgn\,(x^2-4) = \begin{cases} 1 & ; \ x < -2 \ \ ve \ \ x > 2 \\ 0 & ; \ x = -2 \ \ ve \ \ x = 2 \\ -1 & ; \ -2 < x < 2 \end{cases}$$

I. $(-\infty, -2)$ aralığında $y = 1$

II. $(-2, 2)$ aralığında $y = -1$

III. $(2, +\infty)$ aralığında $y = 1$

$y = Sgn\,(x^2 - 4)$



ÖRNEK 59: $f(x) = x + Sgn\,(4 - 2x)$ fonksiyonunu parçalı olarak yazıp, grafiğini çiziniz.

Çözüm:

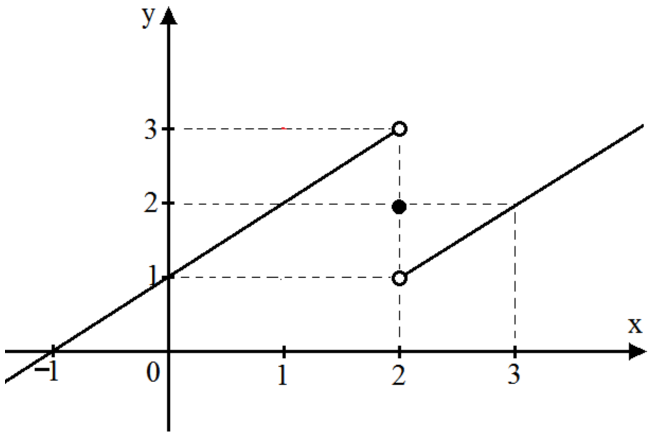
x	-∞	2	+∞
$Sgn\,(4-2x)$	+1	0	−1

$$y = x + Sgn\,(4-2x) = \begin{cases} x+1 & ; \quad x < 2 \\ x & ; \quad x = 2 \\ x-1 & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

I. $(-\infty, 2)$ aralığında $y = x + 1 \begin{cases} x = 0 \ için \ y = 1 \\ x = 2 \ için \ y = 3 \end{cases}$

II. $(2, +\infty)$ aralığında $y = x - 1 \begin{cases} x = 2 \ için \ y = 1 \\ x = 3 \ için \ y = 2 \end{cases}$

$x = 2$ için $y = 2$ olup, $(2,2)$ noktası



ÖRNEK 60: $f(x) = |x| + Sgn\,(x^2 - 1)$ fonksiyonunu parçalı olarak yazıp, grafiğini çiziniz.

Çözüm:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\lvert x \rvert$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$Sgn\,(x^2-1)$	$+1$	0	-1	-1	0	$+1$

	I	II	III	IV

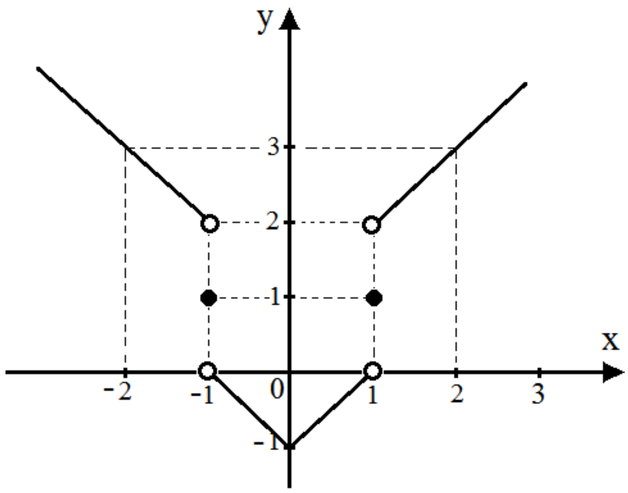
$$y = \begin{cases} -x+1; & x < -1 \\ -x-1; & -1 < x < 0 \\ x-1; & 0 < x < 1 \\ x+1; & x > 1 \\ 1; & x = -1\,, x = 1 \end{cases}$$

I. $(-\infty, -1)$ aralığında $\boxed{y = -x+1} \begin{cases} x = -2 \;\; için \;\; y = 3 \\ x = -1 \;\; için \;\; y = 2 \end{cases}$

II. $(-1, 0)$ aralığında $\boxed{y = -x-1} \begin{cases} x = -1 \;\; için \;\; y = 0 \\ x = 0 \;\; için \;\; y = -1 \end{cases}$

III. $(0,1)$ aralığında $\boxed{y = x-1} \begin{cases} x = 0 \;\; için \;\; y = -1 \\ x = 1 \;\; için \;\; y = 0 \end{cases}$

IV. $(1, +\infty)$ aralığında $\boxed{y = x+1} \begin{cases} x = 1 \;\; için \;\; y = 2 \\ x = 2 \;\; için \;\; y = 3 \end{cases}$



SORU 20: $f(x) = x^2 + Sgn\,(x-2)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

SORU 21: $f(x) = Sgn\,(x^2 + 2x - 3) + x + 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

SORU 22: $f(x) = |x-1| + Sgn\,(3x-6)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

SORU 23: $f(x) = Sgn\,(x^3 - 9x) - x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Tamdeğer Fonksiyonu

Bir $x \in \mathbb{R}$ sayısının *tamdeğeri*, bu x sayısından küçük veya eşit en büyük tamsayıdır. $[\![x]\!]$ ile gösterilir.

$[\![3{,}6]\!] = 3$ $\quad$ $[\![7]\!] = 7$ $\quad$ $[\![6{,}2]\!] = 6$ $\quad$ $[\![-0{,}29]\!] = -1$

$[\![-1{,}85]\!] = -2$ $\quad$ $[\![0{,}8]\!] = 0$ $\quad$ $[\![\pi]\!] = 3$ $\quad$ $[\![-\pi]\!] = -4$

$[\![e]\!] = 2$ $\quad$ $[\![0{,}99]\!] = 0$

$A \subset \mathbb{R}$ ve $g: A \longrightarrow \mathbb{Z}$ olmak üzere $g(x) = [\![f(x)]\!]$ fonksiyonuna "*f(x)'in tamdeğer fonksiyonu*" denir.

$$g(x) = [\![f(x)]\!] = \begin{cases} f(x) & ; \ f(x) \in \mathbb{Z} \\ \begin{array}{c} f(x)\text{den küçük} \\ \text{en büyük tamsayı} \end{array} & ; \ f(x) \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Özellikler:

1) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!]+1$
2) $x \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere; $[\![x]\!] = a \Leftrightarrow a \leq x < a+1$
3) $x \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere; $[\![x+a]\!] = [\![x]\!] + a$
4) $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $\big[\!\big[x + [\![y]\!]\big]\!\big] = [\![x]\!] + [\![y]\!]$
5) $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $[\![x+y]\!] \geq [\![x]\!] + [\![y]\!]$
6) $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $[\![-x]\!] = \begin{cases} -x & ; \ x \in \mathbb{Z} \\ -[\![x]\!] - 1 & ; \ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

ÖRNEK 61: $[\![x+2]\!] = 5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $[\![x+2]\!] = 5 \implies 5 \leq x+2 < 6$

$\implies 5-2 \leq x+2-2 < 6-2$

$\implies 3 \leq x < 4$

Çözüm aralığı : $[3,4)$

ÖRNEK 62: $[\![2x+3]\!] = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $[\![2x+3]\!] = -1 \implies -1 \leq 2x+3 < 0$

$\implies -1-3 \leq 2x+3-3 < 0-3$

$\implies -4 \leq 2x < -3$

$\implies -2 \leq x < -\frac{3}{2}$

Çözüm aralığı : $[-2, -\frac{3}{2})$

ÖRNEK 63: $\left[\!\left[\frac{x+3}{2}\right]\!\right] = 3$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $\left[\!\left[\frac{x+3}{2}\right]\!\right] = 3 \Rightarrow 3 \leq \frac{x+3}{2} < 4$

$\Rightarrow 6 \leq x+3 < 8$

$\Rightarrow 6-3 \leq x+3-3 < 8-3$

$\Rightarrow 3 \leq x < 5$

Çözüm aralığı : $[3,5)$

ÖRNEK 64: $[\![x + [\![x]\!]]\!] = 4$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $[\![x + [\![x]\!]]\!] = 4 \Rightarrow [\![x]\!] + [\![x]\!] = 4$

$\Rightarrow 2[\![x]\!] = 4$

$\Rightarrow [\![x]\!] = 2$

$\Rightarrow 2 \leq x < 3$

Çözüm aralığı : $[2,3)$

ÖRNEK 65: $[\![x + 3[\![x]\!]]\!] = 20$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $[\![x + 3[\![x]\!]]\!] = 20 \Rightarrow [\![x]\!] + 3[\![x]\!] = 20$

$\Rightarrow 4[\![x]\!] = 20$

$\Rightarrow [\![x]\!] = 5$

$\Rightarrow 5 \leq x < 6$

Çözüm aralığı : $[5,6)$

ÖRNEK 66: $\left[\!\left[\frac{2x+3}{5}\right]\!\right] = 7$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $\left[\!\left[\frac{2x+3}{5}\right]\!\right] = 7 \Rightarrow 7 \leq \frac{2x+3}{5} < 8$

$\Rightarrow 35 \leq 2x+3 < 40$

$\Rightarrow 35-3 \leq 2x+3-3 < 40-3$

$\Rightarrow 32 \leq 2x < 37$

$\Rightarrow 16 \leq 2 < \frac{37}{2}$

Çözüm aralığı : $[16, \frac{37}{2})$

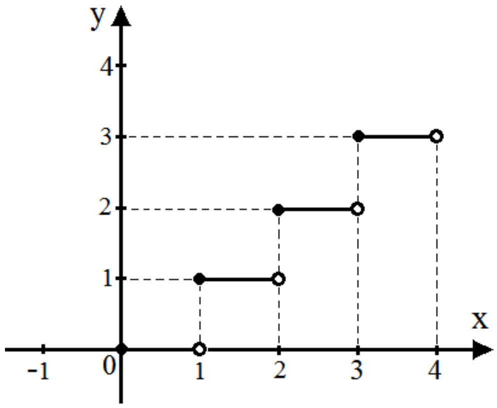
ÖRNEK 67: $f(x) = \frac{|x-2|+[\![\pi - x]\!]}{sgn\,(e-x)+3}$ olduğuna göre $f(4)$ =?

Çözüm: $f(4) = \frac{|4-2|+[\![3{,}14-4]\!]}{sgn\,(2{,}718-4)+3} = \frac{|2|+[\![-0{,}86]\!]}{sgn\,(-1{,}282)+3} = \frac{2-1}{-1+3} = \frac{1}{2}$

ÖRNEK 68: $y = [\![x]\!]$ fonksiyonunun [0,4)aralığında grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$$y = [\![x]\!] = \begin{cases} 0; & 0 \le x < 1 \\ 1; & 1 \le x < 2 \\ 2; & 2 \le x < 3 \\ 3; & 3 \le x < 4 \end{cases}$$



ÖRNEK 69: $y = [\![x]\!] + x$ fonksiyonunun $[-1{,}3]$ aralığında grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$$y = [\![x]\!] + x = \begin{cases} -1 + x; & -1 \le x < 0 \\ x; & 0 \le x < 1 \\ 1 + x; & 1 \le x < 2 \\ 2 + x; & 2 \le x < 3 \\ 6; & x = 3 \end{cases}$$

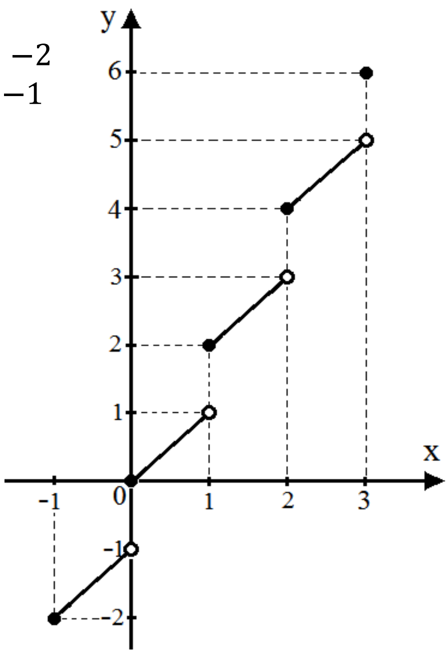
$[-1{,}0)$ aralığında $\boxed{y = -1 + x}$ $\begin{cases} x = -1 \;\; için \;\; y = -2 \\ x = 0 \;\; için \;\; y = -1 \end{cases}$

[0,1) aralığında $\boxed{y = x}$ $\begin{cases} x = 0 \;\; için \;\; y = 0 \\ x = 1 \;\; için \;\; y = 1 \end{cases}$

[1,2) aralığında $\boxed{y = 1 + x}$ $\begin{cases} x = 1 \;\; için \;\; y = 2 \\ x = 2 \;\; için \;\; y = 3 \end{cases}$

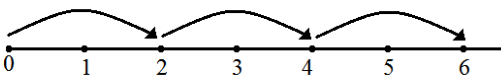
[2,3)aralığında $\boxed{y = 2 + x}$ $\begin{cases} x = 2 \;\; için \;\; y = 4 \\ x = 3 \;\; için \;\; y = 5 \end{cases}$

$x = 3$ için $y = 6$ (3,6) noktası



ÖRNEK 70: $y = \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right] - x$ fonksiyonunun $(0,6)$ aralığında grafiğini çiziniz.

Çözüm:



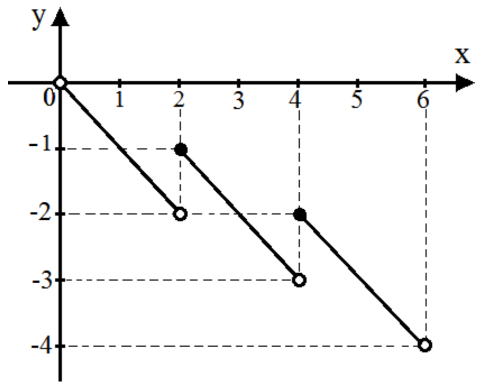
$\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]$ olduğundan aralıkları ikişer ikişer alabiliriz.

$$y = \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right] - x = \begin{cases} -x; & 0 \le x < 2 \\ 1 - x; & 2 \le x < 4 \\ 2 + x; & 4 \le x < 6 \end{cases}$$

$(0,2)$ aralığında $\boxed{y = -x}$ $\begin{cases} x = 0 \ \text{için} \ y = 0 \\ x = 2 \ \text{için} \ y = -2 \end{cases}$

$[2,4)$ aralığında $\boxed{y = 1 - x}$ $\begin{cases} x = 2 \ \text{için} \ y = -1 \\ x = 4 \ \text{için} \ y = -3 \end{cases}$

$[4,6)$ aralığında $\boxed{y = 2 - x}$ $\begin{cases} x = 4 \ \text{için} \ y = -2 \\ x = 6 \ \text{için} \ y = -4 \end{cases}$



ÖRNEK 71: $y = |x - 2| + Sgn\,(x - 1) - [\![x]\!]$ fonksiyonunun $[0,4]$ aralığında grafiğini çiziniz.

Çözüm:

x	-∞	1	2	+∞
$\lvert x-2 \rvert$	$-$	$-$	0	$+$
$Sgn\,(x-1)$	-1	0	$+1$	$+1$

$$[\![x]\!] = \begin{cases} 0; & 0 \le x < 1 \\ 1; & 1 \le x < 2 \\ 2; & 2 \le x < 3 \\ 3; & 3 \le x < 4 \end{cases}$$

Burada her üç parçalı fonksiyon bir arada kullanılmıştır. $[\![x]\!]$ den dolayı $[0,4]$ aralığını tek tek incelemek zorundayız. Yani her aralık için y fonksiyonunun ne şekilde olacağını belirlemeliyiz.

$[0,1)$ aralığında $y = -x + 2 - 1 - 0 \ \Rightarrow \ \boxed{y = 1 - x}$ $\begin{cases} x = 0 \ \text{için} \ y = 1 \\ x = 1 \ \text{için} \ y = 0 \end{cases}$

$(1,2)$ aralığında $y = -x + 2 + 1 - 1 \Rightarrow \boxed{y = 2 - x}$ $\begin{cases} x = 1 \ \text{için} \ y = 1 \\ x = 2 \ \text{için} \ y = 0 \end{cases}$

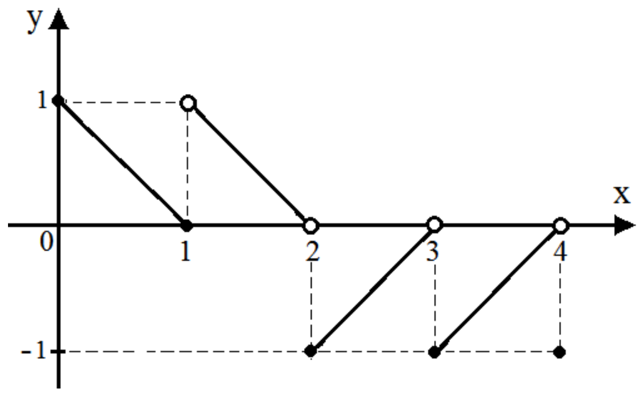
$[2,3)$ aralığında $y = x - 2 + 1 - 2 \ \Rightarrow \boxed{y = x - 3}$ $\begin{cases} x = 2 \ \text{için} \ y = -1 \\ x = 3 \ \text{için} \ y = 0 \end{cases}$

$[3,4)$ aralığında $y = x - 2 + 1 - 3 \ \Rightarrow \ \boxed{y = x - 4}$ $\begin{cases} x = 3 \ \text{için} \ y = -1 \\ x = 4 \ \text{için} \ y = 0 \end{cases}$

$x = 1$ için $y = 1 + 0 - 1 = 0$ olup, (1,0) noktası

$x = 4$ için $y = 2 + 1 - 4 = -1$ olup, (4,-1) noktası

$y = |x-2| + Sgn\,(x-1) - [\![x]\!]$ fonksiyonunun grafiği :



SORU 24: $f: [-2,6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right] + x + 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

SORU 25: $f: [-1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left[\!\left[\frac{3x+1}{2}\right]\!\right]$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

SORU 26: $f: [0,6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![\sqrt{x}]\!] + x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

SORULAR

1) $f(2x+3) = 5x+7$ ise $f(11) = ?$

2) $f(x) - f(x+1) = x$ ve $f(1) = 10$ ise $f(4) = ?$

3) $f(x,y) = x^2 - xy - y^3 + 3$ ise $f(-3,-3) = ?$

4) $f(x) = (a-b+3)x^2 + (a-7)x + 9$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise $a = ?$, $b = ?$

5) $f(x) = 4x+3$ ise $f^{-1}(8) = ?$

6) $f(3x+5) = 2x-2$ ise $f^{-1}(3) = ?$

7) $f(x) = 2^{x+3}$ ise $f^{-1}(4) = ?$

8) $f(x^3+1) = 2x-8$ ise $f^{-1}(2) = ?$

9) $(gof)(x) = \frac{x^2-2x-3}{2}$ ve $f(x) = \frac{x+3}{2}$ ise $g(x) = ?$

10) $f(x) = x^3$ ise $(fofof)(x) = ?$

11) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & ; \quad x \text{ çift ise} \\ x+3 & ; \quad x \text{ tek ise} \end{cases}$ fonksiyonu için $(fofof)(4) = ?$

12) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & ; \quad x \geq 0 \\ 1-3x & ; \quad x < 0 \end{cases}$ fonksiyonu için $(fof)(-2) = ?$

13) $f(x) = 2^x$ olduğuna göre $(fof^{-1})(x) = ?$ ve $(f^{-1}of)(x) = ?$

14) $[\![x^2]\!] = 4$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

15) $\left[\!\!\left[\frac{3x+1}{2}\right]\!\!\right] = -4$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

16) $\left[\!\!\left[\frac{1}{3x+6}\right]\!\!\right] = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

17) $[\![x - [\![2x]\!]]\!] = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

18) $\left[\!\!\left[\frac{2x-3}{4}\right]\!\!\right] + \left[\!\!\left[\frac{2x-7}{4}\right]\!\!\right] = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

19) $\left[\!\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\!\right] + \left[\!\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\!\right] = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

20) $[\![3x+2]\!] \leq -4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

21) $[\![2x-1]\!] < 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

22) $[\![5x-3]\!] > \frac{3}{2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

23) $Sgn\left(\frac{x^2-x-6}{x^2-2x+1}\right) = -1$ denklemini sağlayan kaç tane tamsayı vardır.

24) $f(x) = sgn\,(3-x) + |x-4| - \left[\!\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\!\right]$ fonksiyonu veriliyor.

a) $f(0) + f(3) - f(4) + f(5) = ?$

b) $f(2{,}8) + f(6{,}4) = ?$

25) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = (x-2)\,Sgn(x-1)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

26) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = x^2 + Sgn(x-2)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

27) $f\colon \mathbb{R} - \{-3,3\} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = x + \frac{x}{Sgn(x^2-9)}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

------------------------------------- ◈ -------------------------------------

KARMAŞIK SAYILAR

İkinci bölümde sayı kümelerini tanımlamıştık. Reel sayılar kümesi doğal sayıları, tamsayıları, rasyonel ve irrasyonel sayıları kapsamasına rağmen bütün denklemlerin çözüm kümesini reel sayılarda bulamayabiliriz. Örneğin $x^2 + 4 = 0$ denkleminin reel sayılar için çözüm kümesi boştur. Bu örnekte olduğu gibi karekök içindeki negatif sayıları da temsil edebileceğimiz ve bunun gibi denklemleri de çözebilmemize imkan sağlayan daha geniş bir kümeye ihtiyaç vardır. Bu küme aşağıda tanımladığımız karmaşık sayılar (kompleks sayılar) kümesidir.

Tanım: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $z = a + bi$ şeklinde gösterilen sayılara *karmaşık sayılar* denir. Bu sayı kümesi İngilizce yazılışının baş harfi olan $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

$$\mathbb{C} = \left\{ z \;\middle|\; z = a + bi\,,\ a, b \in R,\ i = \sqrt{-1} \right\}$$

Reel kısım (gerçel kısım) sanal kısım (imajiner kısım)

$z = 3 + 4i$, $z = -3 + i$, $z = 7i$, $z = 8$, $z = -7 + \sqrt{3}\,i$ sayıları birer kompleks sayıdır. Bazı sorularda gerekeceği için i sayısının kuvvetlerinin periyodik olarak tekrarladığını da ekleyelim.

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2.i = -i$$
$$i^4 = i^2.i^2 = 1$$
$$i^5 = i^4.i = i$$
$$i^6 = i^4.i^2 = -1$$
$$i^7 = i^4.i^3 = -i$$
$$\vdots$$

ÖRNEK 1: i^{96} =?

Çözüm: $i^{96} = (i^2)^{48} = (-1)^{48} = 1$

ÖRNEK2: i^{63} =?

Çözüm: $i^{63} = i.i^{62} = i.(i^2)^{31} = i.(-1)^{31} = i.(-1) = -i$

ÖRNEK 3: $x^2+16=0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $x^2+16=0 \quad \Rightarrow x^2=-16$

$$x=\sqrt{-16}$$
$$x=\sqrt{(-1).16}$$
$$x=\mp 4\sqrt{-1}$$
$$x=\mp 4i$$
$$Ç.K.=\{-4i,4i\}$$

ÖRNEK4: $x^2+4x+5=0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: $\Delta = b^2-4ac$

$$\Delta = 4^2-4.1.5=16-20=-4$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4\mp\sqrt{-4i}}{2}=\frac{-4\mp 2i}{2}=-2\mp i$$
$$x_1=-2+i \qquad x_2=-2-i$$

Bir karmaşık sayının eşleniği

$z\in\mathbb{C}$ olmak üzere $z=a+bi$ sayısının eşleniği $\bar{z}=a-bi$ şeklindedir.

ÖRNEK5: $z=5+6i \quad \Rightarrow \bar{z}=5-6i$

$z=-3-7i \quad \Rightarrow \bar{z}=-3+7i$

$z=4i \quad \Rightarrow \bar{z}=-4i$

$z=-2i+8 \quad \Rightarrow \bar{z}=2i+8$

$z=9 \quad \Rightarrow \bar{z}=9$

Bir karmaşık sayının mutlak değeri

$z\in\mathbb{C}$ olmak üzere $z=a+bi$ sayısının mutlak değeri

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

şeklindedir. Ayrıca herhangi bir z karmaşık sayısı için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$|z|=|\bar{z}|=|-z|=|-\bar{z}|$$

ÖRNEK 6: Aşağıdaki karmaşık sayıların mutlak değerlerini inceleyiniz.

$$z = 4 + 3i \qquad \Rightarrow |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$z = -1 + i \qquad \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$z = \sqrt{3} - i \qquad \Rightarrow |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z = \frac{5i+7}{2} \qquad \Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25+49}{4}} = \frac{\sqrt{74}}{2}$$

$$z = 6i \qquad \Rightarrow |z| = \sqrt{6^2} = 6$$

$$z = \sqrt{5} + \sqrt{3}i \qquad \Rightarrow |z| = \sqrt{\sqrt{5}^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Karmaşık sayılarda dört işlem

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di$ olsun.

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

$$z_1 . z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) i$$

Yukarıdaki işlemleri ezberlenecek formül gibi düşünmeyip, z_1 ve z_2 sayılarını yerlerine yazıp bildiğimiz dört işlemle düzenlendiğine dikkat ediniz. Bu düzenlemeyi, sonucu reel ve sanal olmak üzere $a + bi$ formunda yazacak şekilde yapıyoruz.

ÖRNEK 7: $z = \frac{3-2i}{4+3i}$ sayısını $a + bi$ formunda yazınız.

Çözüm: $z = \frac{3-2i}{4+3i} = \frac{(3-2i).(4-3i)}{(4+3i).(4-3i)} = \frac{12-9i-8i+6i^2}{4^2-9i^2} = \frac{12-17i-6}{16+9} = \frac{6}{25} - \frac{17}{25} i$

ÖRNEK 8: $z_1 = 3 - 4i \quad z_2 = 5 + 3i$ sayıları için aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $z_1 + z_2 = ?$

b) $3z_1 - z_2 = ?$

c) $2\bar{z}_1 + 4\bar{z}_2 = ?$

d) $\frac{z_1}{z_2} = ?$

e) $z_1 . z_2 = ?$

f) $z_1^2 + 7 = ?$

g) $|\overline{2z_1 + z_2}| = ?$

h) $|z_1 - z_2| = ?$

Çözüm:

a) $z_1 + z_2 = 3 - 4i + 5 + 3i = 8 - i$

b) $3z_1 - z_2 = 3(3 - 4i) - (5 + 3i)$

$= 9 - 12i - 5 - 3i$

$= 4 - 15i$

c) $2\bar{z}_1 + 4\bar{z}_2 = 2(3 + 4i) + 4(5 - 3i)$

$= 6 + 8i + 20 - 12i$

$= 26 - 4i$

d) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-4i}{5+3i} = \frac{(3-4i).(5-3i)}{(5+3i).(5-3i)} = \frac{15-9i-20i+12i^2}{5^2-9i^2} = \frac{15-29i-12}{25+9} = \frac{3}{34} - \frac{29}{34}i$

e) $z_1.z_2 = (3 - 4i).(5 + 3i) = 15 + 9i - 20i - 12i^2$

$= 15 - 11i + 12$

$= 27 - 11i$

f) $z_1^2 + 7 = (3 - 4i).(3 - 4i) + 7 = 9 - 24i + 16i^2 + 7$

$= 9 - 24i - 16 + 7$

$= -24i$

g) Önce $2z_1 + z_2$ sayısını bulalım.

$2z_1 + z_2 = 2(3 - 4i) + 5 + 3i = 6 - 8i + 5 + 3i = 11 - 5i$

$|\overline{2z_1 + z_2}| = |11 + 5i| = \sqrt{11^2 + 5^2} = \sqrt{121 + 25} = \sqrt{146}$

h) $|z_1 - z_2| = |3 - 4i - (5 + 3i)| = |3 - 4i - 5 - 3i|$

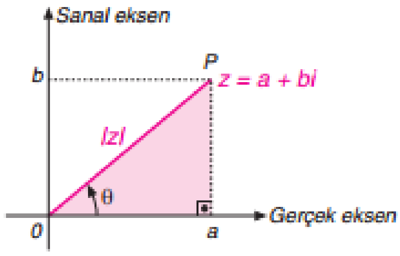
$= |-2 - 7i|$

$= \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2}$

$= \sqrt{53}$

En son h şıkkında hesapladığımız değer aynı zamanda z_1 ve z_2 sayıları arasındaki uzaklığı verir (Mutlak değerin, bir sayının “0” noktasına olan uzaklığı olduğunu hatırlayın).

Bir karmaşık sayının kutupsal gösterimi



$z = a + bi$ sayısının düzlemdeki yeri P noktası olsun. z'nin mutlak değeri 0 noktasına uzaklığıdır:

$$|z| = |OP| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Şekilde görüldüğü gibi pozitif yönde oluşan açı θ açısına z'nin *argümenti* denir ve $arg(z) = \theta$ ile gösterilir. $k \in \mathbb{Z}^+$ $olmak$ $üzere$ $\theta + k2\pi$ değerleri de argümentlerdir. θ açısı ise esas argümenttir. Şekilden de görüldüğü gibi $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ $\sin\theta = \frac{b}{|z|}$ şeklindedir. $|z| = r$ şeklinde kullanarak, z karmaşık sayısının kutupsal yazılışı şu şekildedir:

$$z = r.(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ÖRNEK 9: $z = \sqrt{3} + i$ sayısını kutupsal olarak yazınız.

Çözüm: $r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\sin\theta = \frac{1}{2}$ olduğundan dolayı $\theta = 30°$ dir. o halde z'nin kutupsal gösterimi:

$$z = 2.(\cos 30° + i\sin 30°)$$

veya radyan olarak:

$$z = 2.\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ÖRNEK 10: $z = 2 - 2i$ sayısını kutupsal olarak yazınız.

Çözüm: $r = |z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta &= -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\}\ \theta = 315°$$

Cos ve sin değerlerinin her ikisi de pozitif olsaydı θ açısı $45°$ olacaktı. Ancak cos değeri pozitif, sin değeri negatif olduğundan θ açısı 4.bölgededir. Yani $45°$ nin 4.bölgedeki karşılığı olan $\theta = 315°$ veya $\theta = \frac{7\pi}{4}$ olur. O halde z'nin kutupsal gösterimi:

$$z = 2\sqrt{2}.(\cos 315° + i\sin 315°)$$

veya radyan olarak :

$$z = 2\sqrt{2}.\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

Bir karmaşık sayının kuvvetleri (De Moivre Teoremi)

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $z = a + bi$ sayısının n. kuvveti şu şekildedir:

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Formülden de anlaşılacağı gibi bu teoremi kullanarak herhangi bir z sayısının yüksek kuvvetleri hesaplamak için önce z sayısını kutupsal formda yazmalıyız.

ÖRNEK 11: $z = 2(cos\ 15° + i\ sin\ 15°)$ olduğuna göre z^6 =?

Çözüm: $z^6 = 2^6(cos\ 6.15° + i\ sin\ 6.15°)$

$z^6 = 64(cos\ 90° + i\ sin\ 90°)$

$z^6 = 64(0 + i.1)$

$z^6 = 64i$

ÖRNEK 12: $z = 1 + i$ olduğuna göre z^{15} =?

Çözüm: z sayısını önce kutupsal formda yazıp, sonra De Moivre kuralı ile z^{15} i bulacağız.

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \quad \theta = 45°$$

$$z = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$$

$$z^{15} = \left(\sqrt{2}\right)^{15}(\cos 15.45° + i\sin 15.45°)$$

$$z^{15} = \left(\sqrt{2}\right)^{14}.\sqrt{2}(\cos 675° + i\sin 675°)$$

675°nin esas ölçüsü 315° olup 4.bölgede olduğu için sin değeri (-), cos değeri (+) dır.

$$z^{15} = 128.\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$z^{15} = 128 - 128\,i$$

ÖRNEK 13: $z = -1 + i\sqrt{3}$ olduğuna göre $z^9 = ?$

Çözüm:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \qquad \theta = 120°$$

Cos ve sin değerlerinin her ikisi de pozitif olsaydı θ açısı $60°$ olacaktı. Ancak cos değeri (+), sin değeri (-) olduğundan θ açısı 2.bölgededir. Yani $60°$ nin 2.bölgedeki karşılığı olan $\theta = 120°$ dir.

$$z = 2(\cos 120° + i\sin 120°)$$

$$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z^9 = 2^9\left(\cos 9.\frac{2\pi}{3} + i\sin 9.\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z^9 = 512(\cos 6\pi + i\sin 6\pi)$$

6π ile 2π aynı noktadadır.

$$z^9 = 512.(\underbrace{\cos 2\pi}_{1} + i\,\underbrace{\sin 2\pi}_{0})$$

$$z^9 = 512(1 + i.0)$$

$$z^9 = 512$$

Bir karmaşık sayının kökleri

$|z| = r$ ve $k = 0,1,2,3,\ldots,n-1$ olmak üzere $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ karmaşık sayısının n.dereceden kökleri:

$$W_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + k2\pi}{n}\right)$$

ÖRNEK 14: $z = 4(\cos 60° + i\sin 60°)$ sayısının kareköklerini bulunuz.

Çözüm: Karekökler istendiği için $n = 2$ dir. $r = 4$ olduğu soruda görülüyor. Buna göre yukarıdaki formül:

$$W_k = \sqrt{z} = \sqrt{4}\left(\cos\frac{60° + k2\pi}{2} + i\sin\frac{60° + k2\pi}{2}\right)$$

şeklinde olur. Şimdi de $k = 0$ ve $k = 1$ için kökleri bulalım:

$$k = 0 \quad için \quad W_0 = \sqrt{z} = \sqrt{4}\left(\cos\frac{60° + 0.2\pi}{2} + i\sin\frac{60° + 0.2\pi}{2}\right)$$

$$W_0 = \sqrt{z} = 2(\cos 30° + i\sin 30°)$$

$$W_0 = \sqrt{z} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$W_0 = \sqrt{z} = \sqrt{3} + i$$

$$k = 1 \quad için \quad W_1 = \sqrt{z} = \sqrt{4}\left(\cos\frac{60° + 1.2\pi}{2} + i\sin\frac{60° + 1.2\pi}{2}\right)$$

$$W_1 = \sqrt{z} = 2(\cos 210° + i\sin 210°)$$

$$W_1 = \sqrt{z} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$W_1 = \sqrt{z} = -\sqrt{3} - i$$

ÖRNEK 14: $z = 8(\cos 45° + i\sin 45°)$ sayısının küpköklerini bulunuz.

Çözüm:

Küpkökler istendiği için $n = 3$ dir. $r = 8$ olduğu soruda görülüyor. Buna göre yukarıdaki formül:

$$W_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{45° + k2\pi}{3} + i\sin\frac{45° + k2\pi}{3}\right)$$

şeklinde olur. Şimdi de $k = 0$, $k = 1$ ve $k = 2$ için kökleri bulalım:

$$k = 0 \quad için \quad W_0 = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{45° + 0.2\pi}{3} + i\sin\frac{45° + 0.2\pi}{3}\right)$$

$$W_0 = \sqrt{z} = \sqrt[3]{2^3}(\cos 15° + i\sin 15°)$$

$$W_0 = \sqrt{z} = 2(\cos 15° + i\sin 15°)$$

$$k = 1 \quad için \quad W_1 = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{45° + 1.2\pi}{3} + i\sin\frac{45° + 1.2\pi}{3}\right)$$

$$W_1 = \sqrt{z} = 2(\cos 135° + i\sin 135°)$$

$$W_1 = \sqrt{z} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$W_1 = \sqrt{z} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$$

$$k = 2 \quad için \quad W_1 = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{45° + 2.2\pi}{3} + i\sin\frac{45° + 2.2\pi}{3}\right)$$

$$W_1 = \sqrt{z} = 2(\cos 255° + i\sin 255°)$$

SORULAR

1) $i^5 + i^6 + i^7 + i^8 = ?$

2) $(1 + i)^{14} = ?$

3) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{40}$ işleminin sonucu nedir?

4) $f(x, y) = 4x^3y - 3x^2y^3$ olduğuna göre $f(-i, 2i) = ?$

5) $z = \frac{3}{6-i}$ sayısının eşleniğinin sanal kısmı nedir?

6) $z = \frac{4+2i}{1-5i}$ olduğuna göre $|z| = ?$

7) $w = \frac{1}{2-i} - \frac{1}{2+i}$ olduğuna göre $|w| = ?$

8) $z = 2 - 3i \quad w = -2 - 4i$ olduğuna göre $3z + 4\overline{w} = ?$

9) $\frac{3i+1}{1-4i} + \frac{2i-1}{1+4i} = ?$

10) $x^2 - 8x + 17 = 0$ denkleminin $\mathbb{C}$ için çözüm kümesini bulunuz?

11) $x^2 + ax + b + 3 = 0$ denkleminin köklerinden biri $1 + i$ olduğuna göre $a.b = ?$

12) $z = 1 - \sqrt{3}i$ sayısının esas argümenti kaç radyandır?

13) $z = 1 + i$ sayısını kutupsal olarak yazınız.

14) $z = 3 - 3i$ sayısını kutupsal olarak yazınız.

15) $z = 1 + \sqrt{3}i$ sayısını kutupsal olarak yazınız.

16) $z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\, i$ olduğuna göre $z^{40} = ?$

17) $z = \sqrt{3} - i$ olduğuna göre $z^{12} = ?$

18) Karmaşık sayılar kümesi üzerinde $f(z) = 1 - 2z^6$ fonksiyonu tanımlanıyor. $w = cos\frac{\pi}{3} + i\, sin\frac{\pi}{3}$ olduğuna göre $f(w) = ?$

19) $z = 9(\cos 120° + i \sin 120°)$ sayısının kareköklerini bulunuz.

20) $z = 3(\cos 30° + i \sin 30°)$ sayısının kareköklerini bulunuz

21) $z = 27(\cos 36° + i \sin 36°)$ sayısının küpköklerini bulunuz.

------------------------------------- ◈ -------------------------------------

MATRİSLER

Tanım : $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ ve $j = 1,2,3, \ldots, n$ $m, n \in \mathbb{Z}^+$olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \qquad \begin{matrix} m \to satırsayısı \\ n \to sütunsayısı \\ m \times n \to matrisinboyutu \end{matrix}$$

şeklinde tanımlı tabloya $m \times n$ boyutlu bir matris denir. Matrisler genellikle $[\ ], (\ )$ sembollerinden biri ile gösterilir. Aşağıda bazı matris örnekleri görülmektedir.

$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin boyutu (tipi) 2 x 3 olup elemanları:

$$\begin{matrix} a_{11} = 3 & a_{12} = -2 & a_{22} = 5 \\ a_{21} = 7 & a_{22} = 1 & a_{23} = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & 3 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}, \quad \begin{bmatrix} 1 & sinx \\ cosx & tanx \\ cotx & -1 \end{bmatrix}_{3\times2}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}, \quad [5]_{1\times1}$$

$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}_{n\times1}$ $\to$ sütun matrisi (veya sütun vektörü)

$[a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]_{1\times n} \to$ satır matrisi (veya satır vektörü)

Bazı Matris Çeşitleri

1) Kare Matris: Satır ve sütun sayısı eşit olan matrislerdir ($m = n$).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ sayılarının oluşturduğu köşegene "esas köşegen" denir.

Esas köşegen üzerindeki elemanların toplamına "matrisin izi" denir. Yani bir A kare matrisi için:

$$izA = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

izA yerine $trace\ A$ veya $tr\ A$ ifadeleri de kullanılır.

Örneğin; $A = \begin{bmatrix} -2 & 9 & -1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ matrisi için $iz\,A = -2 + 7 + 1 = 6$ olur.

2) Dikdörtgen Matris: Satır ve sütun sayısı farklı olan matrislerdir ($m \neq n$).

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 & -1 \\ 4 & 0 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 4}$, $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ gibi…

3) Sıfır Matrisi: Tüm elemanları “0” olan matrislerdir.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ gibi…

Sıfır matrisi matris toplamına göre birim elemandır:

$$A + O = O + A = A$$

4) Birim Matris: Köşegen üzerindeki elemanları “1”, diğer tüm elemanları “0” olan matrislerdir. Yani;

$$i = j \ \ için \ \ a_{ij} = 1$$

$$i \neq j \ \ için \ \ a_{ij} = 0$$

şartını sağlayan matrislerdir. Birim matris genellikle “I” ile gösterilir.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots , I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

Birim matris, matris çarpımına göre birim elemandır:

$$A.I = I.A = A$$

5) Köşegen Matris: Esas köşegeni dışındaki tüm elemanları “0” olan matrislerdir.

$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ gibi…

6) Skaler Matris: Esas köşegen üzerindeki elemanları aynı ve diğer tüm elemanları “0” olan matrislerdir.

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ gibi…

7) Üçgen Matris: Esas köşegenin altında veya üstünde kalan tüm elemanları "0" olan matrislerdir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{ÜST ÜÇGEN MATRİS}} , \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}}_{\text{ALT ÜÇGEN MATRİS}} \text{ gibi…}$$

8) Simetrik Matris: Esas köşegene göre simetrik adresteki elemanları aynı olan matrislerdir. Yani;

$\forall i, j$ için $a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow$ A simetrik matristir.

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 8 & -4 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \end{bmatrix} \text{ gibi…}$$

9) Ters-Simetrik Matris: Esas köşegene göre simetrik adresteki elemanları birbirinin ters işaretlisi ve esas köşegen üzerindeki elemanları "0" olan matrislerdir. Yani;

$$\forall i, j \text{ için } \left.\begin{matrix} i = j \text{ iken } a_{ij} = 0 \\ i \neq j \text{ iken } a_{ij} = -a_{ji} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \text{ A ters-simetrik matristir.}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & 8 \\ 3 & -8 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 7 & -1 & 2 \\ -7 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} \text{ gibi…}$$

Birçok özel matris çeşidi vardır. Yukarıda sadece bazıları verilmiştir.

Matris İşlemleri

Bir Matrisin Transpozu (Devriği)

Bir matrisin satır ve sütunlarının yer değiştirmesi ile oluşan matrise o matrisin "transpozu" veya "devriği" denir. A^T şeklinde gösterilir. Bazı kaynaklarda transpoz yerine transpoze olarak kullanılır.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$$

ÖRNEK 1: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ matrisinin transpozu $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

ÖRNEK 2: $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 9 \\ 7 & 8 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin transpozu $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -5 & 8 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

Transpoz özellikleri:

1) $(A^T)^T = A$
2) $(k.A)^T = k.A^T \quad , \quad k \in R$
3) $(A+B)^T = A^T + B^T$
4) $(A.B)^T = B^T.A^T$
5) $(A^n)^T = (A^T)^n \quad , \quad n \in N$

Bir Matrisin Bir Skaler İle Çarpımı

$k \in \mathbb{R}$ ve $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ olmak üzere k ile A matrisinin çarpımı:

$$k.A = k.\left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[k.a_{ij}\right]_{m\times n}$$

şeklindedir. Yani bir matrisi bir sayı ile çarpmak demek, matrisin tüm elemanlarını o sayı ile çarpmak demektir.

ÖRNEK 3: $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$ matrisi için $3A$, $\frac{A}{2}$,$\frac{-2A}{3}$ matrislerini hesaplayınız.

Çözüm: $3A = \begin{bmatrix} 24 & -9 & 12 \\ -3 & 6 & -18 \end{bmatrix}$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}.A = \begin{bmatrix} 4 & \frac{-3}{2} & 2 \\ \frac{-1}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{-2A}{3} = \frac{-2}{3}.A = \begin{bmatrix} \frac{-16}{3} & 2 & \frac{-8}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & 3 \end{bmatrix}$$

İki Matrisin Eşitliği

Aynı boyutlu iki matrisin aynı adresteki elemanları eşit ise bu iki matris birbirine eşittir.

Yani; $A = [a_{ij}]_{m\times n} mxn$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ olmak üzere;

$$\forall i, j \text{ için} \quad a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow A = B$$

ÖRNEK 4: $A = \begin{bmatrix} 0 & x+y & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} y-3 & 5 & 4 \\ -1 & \sqrt{z} & -2 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$A = B$ ise $x = ?$ $y = ?$ $z = ?$

Çözüm:
$$\begin{array}{lll} 0 = y-3 & x+y = 5 & \sqrt{z} = 3 \\ y = 3 & x = 2 & z = 9 \end{array}$$

ÖRNEK 5: $A = \begin{bmatrix} x^2-y & 0 \\ x+y+z & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 6-x \end{bmatrix}$, $A = B^T$ ise $x = ?$ $y = ?$ $z = ?$

Çözüm:
$$\begin{bmatrix} x^2-y & 0 \\ x+y+z & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 9 & 6-x \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} 3 = 6-x & x^2-y = 4 & x+y+z = 9 \\ x = 3 & 9-y = 4 & 3+5+z = 9 \\ & y = 5 & z = 1 \end{array}$$

Matrislerin Toplamı ve Farkı

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ aynı boyutlu iki matrisin toplamı veya farkı

$$A \mp B = [a_{ij}]_{m\times n} \mp [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} \mp b_{ij}]_{m\times n}$$

şeklindedir. Matris toplamının başlıca özellikleri şunlardır :

1) $A + B = B + A$
2) $(A+B)+C = A+(B+C)$
3) $A + 0 = 0 + A = A$ $(0,$ sıfır matrisi)
4) $A + (-A) = (-A) + A = 0$

ÖRNEK 6: $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ ise $A+B = ?$ $A-B = ?$ $2A-3B = ?$

Çözüm:
$$A + B = \begin{bmatrix} 5+9 & 1+8 \\ -3+7 & 2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 9 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5-9 & 1-8 \\ -3-7 & 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 & 16 \\ 14 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -13 \\ -23 & -6 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK 7: $A=\begin{bmatrix} x & 2 \\ x-y & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $2A-B=\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ise $x=?$ $y=?$

Çözüm: $$2A-B=\underbrace{\begin{bmatrix} 2x & 4 \\ 2x-2y & -2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}=\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x-3 & 6 \\ 2x-2y-4 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$2x-3=-3$$
$$2x=0$$
$$x=0$$

$$2x-2y-4=2$$
$$2.0-2y-4=2$$
$$-2y=6$$
$$y=-3$$

Matrislerin Çarpımı

A ve B iki matris olsun. $A\times B$ işleminin yapılabilmesi için öncelikle A'nın sütun sayısı ile B'nin satır sayısı eşit olmalıdır. Aksi halde A ve B çarpılamaz matrislerdir.

$$A\times B=[a_{ij}]_{p\times n}\times[b_{ij}]_{n\times k}=[c_{ij}]_{p\times k}$$

$$c_{ij}=\sum_{t=1}^{n} a_{it}.b_{tj}$$

şeklinde çarpma işlemi yapılır. Bundan sonra $A\times B$ yerine $A.B$ şeklinde kullanacağız.

Örneğin; $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2}$ ve $B=\begin{bmatrix} x & y & z \\ t & u & v \end{bmatrix}_{2\times 3}$ matrisleri için

$$A.B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x & y & z \\ t & u & v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+bt & ay+bu & az+bv \\ cx+dt & cy+du & cz+dv \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ancak $B.A$ çarpımı yapılamaz. Çünkü B'nin sütun sayısı 3, A'nın satır sayısı 2 olup eşit değillerdir.

A,B,C çarpılabilir matrisler olmak üzere, matris çarpımının özellikleri:

1) $(A.B).C=A.(B.C)$
2) $(k.A).B=k.(A.B)$, $k\in$ R
3) $(A+B).C=AC+BC$
4) $A.(B+C)=AB+AC$

Uyarılar:

1) $A.B = O$ ise $A = O$ veya $B = O$ olması gerekmez. Yani kendisi sıfır matrisi olmadığı halde çarpımları sıfır matrisini veren matrisler vardır.
2) $A.C = B.C$ ise $A = B$ olmak zorunda değildir.
3) $n \in N$ ve $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times m}$ olmak üzere A matrisinin kuvvetleri:

$$A^0 = I_m,\quad A^1 = A,\quad A^2 = A.A,\qquad A^3 = A^2.A, \dots\quad ,\qquad A^n = A^{n-1}.A$$

4) Birim matrisin bütün kuvvetleri kendisine eşittir. Yani $n \in N$ olmak üzere:

$$I^n = I$$

SORU: Yukarıdaki 1. ve 2. maddeye uygun A, B, C matrislerine örnek bulunuz.

ÖRNEK 8: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ $A.B = ?$ $\quad B.A = ?$

Çözüm:

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.6 + 3.0 + (-2).7 & 1.(-1) + 3.4 + (-2).(-3) & 1.0 + 3.(-5) + (-2).2 \\ 0.6 + 4.0 + 3.7 & 0.(-1) + 4.4 + 3.(-3) & 0.0 + 4.(-5) + 3.2 \\ 5.6 + (-1).0 + 2.7 & 5.(-1) + (-1).4 + 2.(-3) & 5.0 + (-1).(-5) + 2.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 + 0 - 14 & -1 + 12 + 6 & 0 - 15 - 4 \\ 0 + 0 + 21 & 0 + 16 - 9 & 0 - 20 + 6 \\ 30 + 0 + 14 & -5 - 4 - 6 & 0 + 5 + 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 17 & -19 \\ 21 & 7 & -14 \\ 44 & -15 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6.1 + (-1).0 + 0.5 & 6.3 + (-1).4 + 0.(-1) & 6.(-2) + (-1).3 + 0.2 \\ 0.1 + 4.0 + (-5).5 & 0.3 + 4.4 + (-5).(-1) & 0.(-2) + 4.3 + (-5).2 \\ 7.1 + (-3).0 + 2.5 & 7.3 + (-3).4 + 2.(-1) & 7.(-2) + (-3).3 + 2.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 + 0 + 0 & 18 - 4 + 0 & -12 - 3 + 0 \\ 0 + 0 - 25 & 0 + 16 + 5 & 0 + 12 - 10 \\ 7 + 0 + 10 & 21 - 12 - 2 & -14 - 9 + 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 14 & -15 \\ -25 & 21 & 2 \\ 17 & 7 & -19 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi $A.B \neq B.A$ dir.

ÖRNEK 8: $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$ ise $A.B = ?$ $B.A = ?$

Çözüm: $A.B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3} . \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 - 5 + 24 \\ -24 - 1 - 8 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 51 \\ -33 \end{bmatrix}_{2\times 1}$

B matrisi (3×1) boyutlu , A matrisi (2×3) boyutlu olduğundan , yani $1 \neq 2$ olduğundan $B.A$ çarpımı yapılamaz.

ÖRNEK 9: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ ise $A \times B = ?$ ve $B \times A = ?$

Çözüm:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+2 & 4+4 \\ 3+3 & 6+1 & 12+2 \\ 4+6 & 8+2 & 16+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 6 & 7 & 14 \\ 10 & 10 & 20 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6+16 & 2+2+8 \\ 3+3+8 & 6+1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 12 \\ 14 & 11 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

ÖRNEK 10: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ve $A.B = B.A$ olduğuna göre $x = ?$

Çözüm:

$$\left.\begin{aligned} A.B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 3x+2 & 6 \end{bmatrix} \\ B.A &= \begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 3x + 2 &= 10 \\ 3x &= 8 \\ x &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

ÖRNEK 11: $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ise $X^2 + Y^3 = ?$

Çözüm:

$$X^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}$$

$$Y^3 = Y^2.Y = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 11 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ 22 & -39 \end{bmatrix}$$

$$X^2 + Y^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ 22 & -39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ 23 & -38 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK 12: $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ise $P^{10} = ?$

Çözüm: $P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \Rightarrow P^{10} = (P^2)^5 = I^5 = I$

ÖRNEK 13: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ve $f(x) = 2x^2 - x + 3$ olduğuna göre $f(A) = ?$

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
f(A) = 2A^2 - A + 3I &= 2.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 2.\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 10 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 20 & 44 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 16 & 18 \\ 27 & 43 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Bir Matrisin Çarpmaya Göre Tersi (İnversi)

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ matrisleri için

$$A.B = B.A = I$$

eşitliği sağlanıyorsa B'ye A'nın "*ters matrisi veya inversi*" denir. $B = A^{-1}$ ile gösterilir. Bu durumda yukarıdaki eşitlik şu şekilde olur:

$$\boxed{A.A^{-1} = A^{-1}.A = I}$$

Not: Her matrisin tersi yoktur.

Tersi olan matrislere "regüler matris" denir.

Tersi olmayan matrislere "singüler matris" denir

Matris tersi ile ilgili özellikler şunlardır:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$
2) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
3) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, $n \in$N
4) $A^{-1} = A^T \Rightarrow$ A ortogonal (dik) matristir.

ÖRNEK 14: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ise $A^{-1} = ?$

Çözüm: A matrisinin tersini $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ şeklinde alalım.

$$A.A^{-1} = I$$

eşitliği sağlanmalıdır.Yani

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a - c & 2b - d \\ 3c & 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2a - c = 1 & 2b - d = 0 \\ 3c = 0 & 3d = 1 \end{matrix}$$

Bu denklem sistemleri çözüldüğünde $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{6}$, $c = 0$, $d = \frac{1}{3}$ değerleri bulunur.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK 15: $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ ise $B^{-1} = ?$

Çözüm: $B.B^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a + 5c & 2b + 5d \\ a + 6c & b + 6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2a + 5c = 1 & 2b + 5d = 0 \\ a + 6c = 0 & b + 6d = 1 \end{matrix}$$

Bu denklem sistemleri çözüldüğünde $a = \frac{6}{7}$, $b = \frac{-5}{7}$, $c = \frac{-1}{7}$, $d = \frac{2}{7}$ değerleri bulnur.

O halde ters matris şu şekilde olur:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Bu örneklerin sonucuna bakılırsa ters matris içinde kalan tam sayılar verilen matristeki sayılar ile bağlantılıdır. Yani esas köşegendeki sayılar yer değiştirmiş, diğer köşegendeki sayılar yerinde kalıp işaret değiştirmiştir. Matris dışına ise A'nın determinantının çarpmaya göre tersi yazılmıştır.O halde bunu bir kural olarak verip, 2x2 tipindeki matrislerin tersini daha kısa yoldan bulabiliriz.

Kural:

$$\boxed{A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ ise \ \ A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

Burada $ad-bc=\det A=|A|$ şeklinde de gösterilebilir. Bu değere A'nın determinantı denir.Bir sonraki bölümde determinant konusu daha geniş olarak ele alınacaktır.

ÖRNEK 16: $P=\begin{bmatrix} -9 & 5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ ise $P^{-1}=?$

Çözüm: $|P|=(-9).4-5.(-6)=-6$ $\quad P^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$

ÖRNEK 17: $P=\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ ise $P^{-1}=?$

Çözüm: $|P|=8.6-7.2=34$ $\quad P^{-1}=\frac{1}{34}\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

ÖRNEK 18: $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\ ise \ A^{-1}=?$

Çözüm: $A.A^{-1}=I$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a+d-3x & 2b+e-3y & 2c+f-3z \\ -2d+x & -2e+y & -2f+z \\ 4a+2d+3x & 4b+2e+3y & 4c+2f+3z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2a+d-3x&=1 \\ -2d+x&=0 \\ 4a+2d+3x&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2b+e-3y&=0 \\ -2e+y&=1 \\ 4b+2e+3y&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2c+f-3z&=0 \\ -2f+z&=0 \\ 4c+2f+3z&=1 \end{aligned}$$

Yukarıdaki denklem sistemleri çözüldüğünde

$$a=\frac{2}{9}\,, b=\frac{1}{4}\,, \quad c=\frac{5}{36}\,, \quad d=\frac{-1}{9}\,, e=\frac{-1}{2}\,, f=\frac{1}{18}\,, x=\frac{-2}{9}\,, y=0\,, z=\frac{1}{9}$$

değerleri elde edilir. Buna göre A'nın ters matrisi şu şekilde olur:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{4} & \frac{5}{36} \\ \frac{-1}{9} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{18} \\ \frac{-2}{9} & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

DETERMİNANT

Tanım: M, tüm kare matrislerin kümesi olmak üzere $D: M \longrightarrow R$ şeklinde tanımlı fonksiyona "determinant fonksiyonu" denir. Yani determinant, karesel bir matrisi reel sayıya dönüştüren bir fonksiyondur. Bir A matrisinin determinantı $\det A \; veya |A|$ şeklinde gösterilir.

$$\det A = |A| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinantın özellikleri

1) Bir determinantın bir satırdaki veya bir sütundaki elemanları 0 ise, o determinantın değeri "0"dır.
2) Bir determinantta aynı numaralı satırlar ve sütunlar yer değiştirirse, determinantın değeri değişmez.
3) Bir determinantın iki satırı veya sütunu yer değiştirirse, determinantın işareti değişir.
4) Bir determinantın bir sayı ile çarpılması demek, her hangi bir satırın veya sütunun o sayı ile çarpılması demektir.
5) Bir determinantın iki satır veya sütunu aynı elemanlardan oluşuyorsa veya orantılı ise, o determinantın değeri 0 dır.
6) Bir determinantta bir satırın veya sütunun elemanlarını bir sayı ile çarpıp bir başka satırın ya da sütunun karşılıklı elemanlarına eklemek determinantın değerini değiştirmez.

Determinant Hesaplama Yöntemleri

i) 2×2 Boyutlu Matrislerin Determinantı

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ii) 3×3 Boyutlu Matrislerin Determinantı

1.Yol (Sarrus Kuralı): Bu kural sadece 3x3 boyutlu matrislerin determinantı için kullanılır.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ x & y & z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= aez + bfx + cdy - (cex + afy + dbz)$$

veya;

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = aez + dyc + xbf - (cex + fya + zbd)$$

2.Yol (Laplace açılımı): Bu kural matrisin herhangi bir satır veya sütununa göre açılımıdır. Tek numaralı satır veya sütun için ilk eleman (+) ile başlar, çift numaralı satır veya sütun için ilk eleman (-) ile başlar ve sıra ile işaret değiştirilir.

1. satıra göreLaplace açılımı:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} e & f \\ y & z \end{vmatrix} - b.\begin{vmatrix} d & f \\ x & z \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ x & y \end{vmatrix}$$

2.sütuna göre Laplace açılımı:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = -b.\begin{vmatrix} d & f \\ x & z \end{vmatrix} + e.\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} - y.\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

iii) 3×3'ten Daha Büyük Boyutlu Matrislerin Determinantı

Laplace açılımı 3x3 ve daha büyük boyutlu matrislerin determinantının hesaplanmasında kullanılır.

ÖRNEK 19: $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 4.5 - 2.7 = 20 - 14 = 6$

ÖRNEK 20: $\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = (-6).3 - (-2).8 = -18 + 16 = -2$

ÖRNEK 21: $\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 9.3 - 5.(-7) = 27 + 35 = 62$

ÖRNEK 21: $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

ÖRNEK 22: $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ -x & 2x \end{vmatrix} = (x+1)2x - 3(-x) = 2x^2 + 2x + 3x = 2x^2 + 5x$

ÖRNEK 23: $\begin{vmatrix} 1840 & 1843 \\ 1841 & 1844 \end{vmatrix}$ =?

$1840 = a$ olsun. $\Rightarrow \begin{vmatrix} a & a+2 \\ a+1 & a+4 \end{vmatrix} = a(a+4) - (a+2)(a+1)$

$= a^2 + 4a - (a^2 + 3a + 2)$

$= a^2 + 4a - a^2 - 3a - 2$

$= a - 2$

$= 1840 - 2$

$= 1838$

ÖRNEK 24: $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A$ =? (Sarrus kuralı ile çözünüz.)

Çözüm: $\det A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 6 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

$= 5.4.6 + 0.(-2).(-3) + 3.1.5 - [3.4.(-3) + 5.(-2).5 + 0.1.6]$

$= 120 + 15 - (-36 - 50)$

$= 221$

ÖRNEK 25: $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|$ =? (Laplace açılımı ile çözünüz.)

Çözüm: 1.sütuna göre Laplace açılımı yapalım:

$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 7.\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-3).\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

$= 7(5 + 8) - 3(0 - 30)$

$= 181$

Minör ve Kofaktör

A,$n \times n$ boyutlu bir kare matris olsun. A'nın herhangi bir a_{ij} elemanı için, matrisin i-yinci satır ve j-yinci sütunu çıkarıldıktan sonra kalan matrisin determinantına a_{ij} elemanının *minörü* denir ve M_{ij} ile gösterilir.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$$

ifadesine de a_{ij} elemanının *kofaktörü* denir (Kofaktör için işaretli minör veya eş çarpan da denilir).

ÖRNEK 26: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ matrisinintüm elemanlarının kofaktörlerini bulunuz.

Çözüm: $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 32 = 13$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -(54 - 28) = -26$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 48 - 35 = 13$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -(18 - 24) = 6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(8 - 14) = 6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 18) = 14$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 12 = -7$$

Not: Yukarıdaki örnekten de görülebileceği gibi bir matrisin determinantı, herhangi bir satır veya sütun elemanları ile bu elemanların kofaktörlerinin çarpımlarının toplamıdır (Bunun daha önce Laplace açılımı olduğunu belirtmiştik).

Örnek 26 daki matrisin determinantını 2.satıra göre yazarsak:

$$detA = 6.A_{21} + 5.A_{22} + 4.A_{23}$$

$$detA = 6.6 + 5.(-12) + 4.6$$

$$detA = 36 - 60 + 24$$

$$detA = 0$$

Ek matris (Adjoint matris)

A,$n \times n$ boyutlu bir kare matris olsun. A matrisinin tüm a_{ij} elemanlarının yerine A_{ij}kofaktörlerinin yazılmasıyla oluşan matrisin transpozuna (devriğine) A'nın *ek matrisi* veya *Adjoint matrisi* denir.$Ek(A)$veya $Adj(A)$ ile gösterilir.

$$Ek(A) = [A_{ij}]^T$$

ÖRNEK 27: $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin ek matrisini yazınız.

Çözüm: $A_{11} = (-1)^{1+1}.3 = 3$

$A_{12} = (-1)^{1+2}.2 = -2$

$A_{21} = (-1)^{2+1}.7 = -7$

$A_{22} = (-1)^{2+2}.6 = 6$

$$Ek(A) = Adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK 28: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin ek matrisini bulunuz.

Çözüm: $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 35 - 3 = 32$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -(-5 - 0) = 5$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 0 = -3$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -(-10 - 15) = 25$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 0 = 20$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -(12 - 0) = -12$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 21 = -23$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(4 + 3) = -7$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 2 = 26$

$$Ek(A) = Adj(A) = \begin{bmatrix} 32 & 5 & -3 \\ 25 & 20 & -12 \\ -23 & -7 & 26 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 32 & 25 & -23 \\ 5 & 20 & -7 \\ -3 & -12 & 26 \end{bmatrix}$$

Lineer Denklem Sistemlerinin Determinant İle Çözümü

(Cramer Kuralı)

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots + a_{nn}x_n = b_m \end{matrix}\right\}$$ lineer denklem sistemi verilsin.

Bu sistemi matris formunda yazalım:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{KATSAYILAR MATRİSİ}} \qquad X = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\substack{\text{BİLİNMEYENLER} \\ \text{MATRİSİ}}} \qquad B = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\substack{\text{SABİTLER} \\ \text{MATRİSİ}}}$$

olmak üzere verilen lineer denklem sisteminin matris formunda yazılışı şu şekildedir:

$$AX = B$$

Bu sistemin çözümünü bulmak için Δ, Δx_1, $\Delta x_2, \dots$, Δx_n değerlerini hesaplamamız gerekir. Bu hesaplama aşağıdaki gibi yapılır:

$\Delta = \det A = |A|$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \dots \ ,$$

$$\Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Sonuç olarak Cramer kuralına göre verilen lineer denklem sisteminin çözümü:

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \qquad \dots \qquad , x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}}$$

Sistemin çözümleri için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i) $\Delta \neq 0$ ise sistemin <u>tek çözümü</u> vardır.

ii) $\Delta = 0$ ve $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = 0$ ise sistemin <u>sonsuz çözümü</u> vardır.

iii) $\Delta = 0$ ve $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ değerlerinden en az bir tanesi sıfırdan farklı ise <u>çözümü yoktur</u>.

Eğer $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ ise sisteme "*Homogen Lineer Denklem Sistemi*" denir. Homojen sistemlerin çözümü için şu ifadeler geçerlidir:

i) $\Delta \neq 0$ ise $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ olur ve buna "*aşikar çözüm*"denir

ii) $\Delta = 0$ ise sitemin sonsuz (parametrik) çözümü vardır.

Not: Parametrik çözümlerde bilinmeyenlerden birini sabit kabul edip, bilinmeyen sayısı eksiltilir. Denklemdeki diğer bilinmeyenlerin değeri, bu parametreye(sabit değer) bağlı olarak bulunur. Parametre bir reel sayı olarak alınırsa sistemin bir özel çözümü bulunur.

ÖRNEK 29: $\left.\begin{array}{l} 3a - 2b = 2 \\ 4a - 5b = -23 \end{array}\right\}$ lineer denklem sistemini Cramer kuralı ile çözünüz.

Çözüm: $$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -23 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -15 - (-8) = -7$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -23 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 46 = -56$$

$$\Delta b = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -23 \end{vmatrix} = -69 - 8 = -77$$

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{-56}{-7} = 8\,, \qquad b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{-77}{-7} = 11$$

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK 30: $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 1 \\ -x + y - 2z = 2 \end{array}\right\}$ lineer denklem sistemini Cramer kuralı ile çözünüz.

Çözüm:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 3 + 1 - (-2 - 2 - 6)$$
$$= 6$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 1 - (4 - 6) = -3$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 2 - (-1 - 4) = 3$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 3 - (2 + 6) = -3$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK 31: $\left.\begin{aligned} 2a - b - 3c &= 3 \\ 3a - 4c &= 0 \\ a + 2b + c &= 4 \end{aligned}\right\}$ lineer denklem sistemini Cramer kuralı ile çözünüz.

Çözüm:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\text{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 18 - (-16 - 3) = 5$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 16 - (-24) = 40$$

$$\Delta b = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 36 - (-32 + 9) = -25$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18 - (-12) = 30$$

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{40}{5} = 8$$

$$b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{-25}{5} = -5$$

$$c = \frac{\Delta c}{\Delta} = \frac{30}{5} = 6$$

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK32: $\left.\begin{aligned} x+y+z+t&=5\\ 2y+3t&=0\\ 2x+4z&=6\\ x+z+2t&=0 \end{aligned}\right\}$ Lineer denklem sistemini Cramer kuralı ile çözünüz.

Çözüm:

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&3\\2&0&4&0\\1&0&1&2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\\6\\0\end{bmatrix}$$

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&3\\2&0&4&0\\1&0&1&2\end{vmatrix}=-1.\begin{vmatrix}0&0&3\\2&4&0\\1&1&2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&0\\1&1&2\end{vmatrix}=10$$

$$\Delta x=|A|=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\0&2&0&3\\6&0&4&0\\0&0&1&2\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}5&1&1\\6&4&0\\0&1&2\end{vmatrix}+3.\begin{vmatrix}5&1&1\\6&0&4\\0&0&1\end{vmatrix}=50$$

$$\Delta y=|A|=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\0&0&0&3\\2&6&4&0\\1&0&1&2\end{vmatrix}=3.\begin{vmatrix}1&5&1\\2&6&4\\1&0&1\end{vmatrix}=30$$

$$\Delta z=|A|=\begin{vmatrix}1&1&5&1\\0&2&0&3\\2&0&6&0\\1&0&0&2\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}1&5&1\\2&6&0\\1&0&2\end{vmatrix}+3.\begin{vmatrix}1&1&5\\2&0&6\\1&0&0\end{vmatrix}=-10$$

$$\Delta t=|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&5\\0&2&0&0\\2&0&4&6\\1&0&1&0\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}1&1&5\\2&4&6\\1&1&0\end{vmatrix}=-20$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{50}{10}=5$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{30}{10}=3$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{-10}{10}=-1$$

$$t=\frac{\Delta t}{\Delta}=\frac{-20}{10}=-2$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\\-1\\-2\end{bmatrix}$$

SORULAR

1) $A = \begin{bmatrix} -x & -4 \\ 2x & t \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8+2z & 4y \\ 2t-2 & -6 \end{bmatrix}$, $A = -\frac{B}{2}$ ise $x =?$ $y =?$ $z =?$ $t =?$

2) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1-x \\ y & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2y \\ 1-3x & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$A + B = C^T$ ise $x =?$ $y =?$

3) $P = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $f(x) = 3x^2 - 4x + 6$ olduğuna göre $f(P) =?$

4) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ ve $f(x) = x^2 + 2x - 8$ olduğuna göre $f(A) =?$

5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}$ olduğuna göre $x =?$ $y =?$

6) $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ olduğuna göre
$a)$ $A^2 = k.A$ ise $k =?$
$b)$ $A^3 = p.A$ ise $p =?$

7) $A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{bmatrix}$ ise $A^2 =?$

8) $B = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ ise $B^2 =?$

9) $C = \begin{bmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}$ ise $C^{-1} =?$

10) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ olduğuna göre $A^{-1} + B^{-1} =?$

11) $A = \begin{bmatrix} -m & m \\ 0 & -1 \end{bmatrix} A^{-1} + A^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ olduğuna göre $m =?$

12) $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$ matrisleri için $A.A^T = B$ ise $x =?$

13) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ve $C = B^T.A^{-1}$ olduğuna göre C matrisini bulunuz.

14) $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ olduğuna göre $P^{-1} =?$

15) $A = \begin{bmatrix} x & 4 & -x \\ -5 & 2 & -2x \\ 2x & 0 & x \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.
a) $|A| = 0$ olması için $x =?$
b) $|A| = 10$ olması için $x =?$

16) $\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 1 & -1 & 3 \\ x & 3 & x \end{vmatrix} = 8$ olduğuna göre $x =?$

17) $\begin{vmatrix} \log_5 3 & \log_{25} 49 \\ \log_7 5 & \log_{27} 25 \end{vmatrix}$ determinantının değeri kaçtır?

18) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 8 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \end{vmatrix}$=?

19) $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. a_{21} ve a_{33} elemanlarının kofaktörlerinin toplamını bulunuz ($A_{21} + A_{33}$ =?).

20) $\left.\begin{array}{l} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + kz = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \end{array}\right\}$ siteminin sonsuz sayıda çözümü olduğuna göre k =?

21) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y - 4z = -1 \\ 4x + 2y + 3z = 8 \\ 6x - y + z = 3 \end{array}\right\}$ sistemini Cramer yöntemi ile çözünüz.

22) $\left.\begin{array}{l} 2a + b + 2c = 4 \\ a - b + c = -10 \\ -3a + b - c = 4 \end{array}\right\}$ sistemini Cramer yöntemi ile çözünüz.

23) $\left.\begin{array}{l} 2x - y + z = 16 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 3x + y - 3z = -6 \end{array}\right\}$ sistemini Cramer yöntemi ile çözünüz.

24) $\left.\begin{array}{l} a - 3b + c = 20 \\ 2a + 2b - 3c = -20 \\ 3a - b + 2c = 80 \end{array}\right\}$ sistemini Cramer yöntemi ile çözünüz.

25) $\left.\begin{array}{l} y + z - t = 2 \\ x + z - 2t = -4 \\ 2x - 2y + t = -3 \\ x - y + 3z = 9 \end{array}\right\}$ sistemini Cramer yöntemi ile çözünüz.

26) $\left.\begin{array}{l} 2a - 4b - c - d = 10 \\ 3a - 6b + 2c + 6d = 19 \\ a + 2b - 3c + d = -5 \\ a + c + d = 16 \end{array}\right\}$ sistemini Cramer yöntemi ile çözünüz.

------------------------------------ ◈ ------------------------------------

Kaynaklar

- ARGÜN Z. (2001). *Temel Matematik* , Ankara, Seçkin Yayıncılık.
- BALCI M. (2008). *Meslek Yüksek Okulu ve Teknik Eğitim Fakülteleri İçin Temel Matemati,.* Ankara, Balcı Yayınları.
- BİZİM O., CANGÜL İ. N., CANGÜL O., ÇELİK N., ÇELİK B., ÖZTÜRK M. (2000). *Temel Matematik.* Bursa, Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı Yayın No:165.
- BOZKURT D., HATIR E., OTURANÇ G., TAŞKARA N. (2001). *Genel Matematik I,* Konya, S.Ü.Basımevi.
- ÇELİK B., CANGÜL İ. N., ÇELİK N., BİZİM O., ÖZTÜRK M. (2010). *Temel Matematik (5.baskı),* Bursa, Dora Basım Yayın Dağıtım.
- ÇEVİK A., BOZACI E. (2006). *Genel Matematik I (2.basım),* Ankara, Nobel Yayın Dağıtım.
- ERTUĞRUL İ. (2006). *Temel Matematik (3.baskı),* Bursa, Ekin Kitabevi.
- HALİLOV H., HACISALİHOĞLU H., KUTLU K., GÜLER B. Ö. (2010). *Genel Matematiğe Giriş I.Cilt,* Ankara, Efil Yayınevi.
- T.C.Anadolu Üniversitesi Yayınları (2009). *Genel Matematik.* Eskişehir, Açıköğretim Fakültesi Yayınları no:708.
- T.C.Anadolu Üniversitesi Yayınları. *Reel Analiz.* Eskişşehir, Açıköğretim Fakültesi Yayınları no:600.
- TEMİZYÜREK K., ÇOLAKOĞLU N. (2009). *Meslek Yüksekokulları için Uygulamalı Matematik,* İstanbul, Beta Basım.

İnternet Siteleri:

- ABDULLAYEV, G., TAŞKIN, C., & ÇETİN, S. *Matematik-I.* http://www.scribd.com/doc/47294484/matematik-1-ders-notlari.
- ÇAKI, M. (2009). *Analitik Geometri 2 Ders Notu.* Ankara: MEB EğiTek http://egitek.meb.gov.tr/aok/aok_kitaplar/AolKitaplar/AnalitikGeometri/2.pdf.
- ÖZER, M.N. *Trigonometri.* http://math.ogu.edu.tr/mnozer/trigonometri.pdf

İKSAD
Publishing House
978-625-7029-00-1