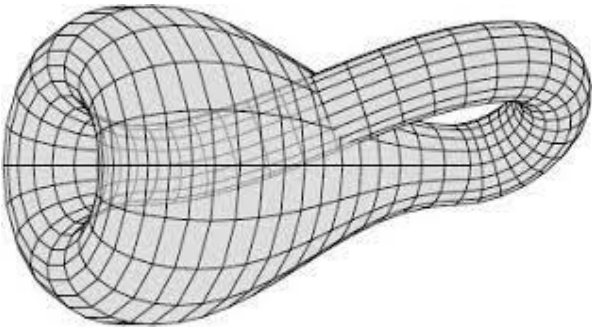
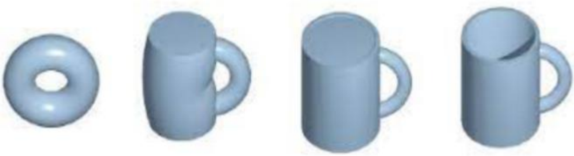


MATEMATİĞİN DERİNLİKLERİNDE TOPOLOJİNİN GİZEMİ

Dr. Öğr. Üyesi
Arife ATAY



İKSAD
Publishing House

MATEMATİĞİN DERİNLİKLERİNDE TOPOLOJİNİN GİZEMİ

Dr. Öğr. Üyesi Arife ATAY

DOI: https://dx.doi.org/10.5281/zenodo.10050310

Institution of Economic Development and Social Researches Publications®
(The Licence Number of Publicator: 2014/31220)
TÜRKİYE TR: +90 342 606 06 75
USA: +1 631 685 0 853
E mail: iksadyayinevi@gmail.com
www.iksadyayinevi.com

ISBN: 978-625-367-380-2
Cover Design: Arife ATAY
October / 2023
Ankara / Türkiye
Size = 14,8x21 cm

ÖNSÖZ

Bu çalışmada ilk olarak topoloji nedir ve nerelerde kullanılır sorusunu yanıtlamaya çalışarak meraklısına topolojiyi tanıtmayı hedefliyoruz. Bu bağlamda, topolojinin tarihçesi, uygulama alanları, neden önemli olduğu ve günlük hayatta nerelerde karşılaşılabileceği gibi konu başlıkları altında yapılan araştırmaların okuyucuya aktarılması amaçlanmıştır.

Sonrasında ise Matematikte topoloji ve topolojik uzay nedir; topoloji matematiğin hangi dallarında kullanılır; önemli topoloji problemleri nelerdir sorularının yanıtlarını okuyucuya ulaştırmayı hedefliyoruz.

Son olarak çeşitli topolojik uzayları tanıtıp örneklendirerek aslında topolojik uzayların çeşitlendirilebilir tarafından bahsedeceğiz.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Dünyamızın en temel özelliklerinden süreklilik ayrıntılı olarak incelendiğinde bizi topolojiye götürür. Topoloji, matematiğin ana dallarından biridir. Matematik alanında topoloji, uzayları inceleyen, özellikle de bir uzayın şeklinden kaynaklanan özellikleri tanımlayan bir matematik dalıdır. Basitçe anlatmak gerekirse topoloji, şekillerin incelenmesiyle ilgilenir. Ancak bu incelenme şekillerin ölçümleri olmadan yapılır. Klasik geometride bir şekli kaydırır, yansıtır veya döndürürsünüz ve sonucunda elde edeceğiniz şekiller birbirine eş şekiller olur. Önemli olan açı ve uzunlukların değişmemesidir. Ancak topoloji için bu gibi durumlar fazla önemli değildir. Topoloji, bir nesnenin kopmadan veya yırtılmadan bükülmesi halinde, şekli bozulan nesnenin bütünlüğünü bozmayan tüm özelliklerini araştırır. Topoloji kesmeden, delmeden veya birbirine yapışmadan sürekli gerdirme veya bükme yoluyla şekillerin birbirine dönüşmeleri ile ilgilenir.

Birinci bölümde topoloji tanıtılırken, topoloji kavramının en karmaşık ifadesi ile başlanılacak ve gidererek daha basite indirgenerek gündelik ifadeler ile herkes tarafından rahatlıkla anlaşılabilecek en sade haline ulaşmayı hedefleyen bir yol izlenecektir.

İkinci bölümde matematik alanında nokta küme topolojisinde teorik anlamda topoloji ve topolojik uzay nedir sorusu yanıtlanacaktır. Devamında topolojide ünlü problemlerden bahsedilecektir. Ayrıca topolojinin uygulama alanları verilecektir.

Üçüncü bölümde ise çeşitli topolojik uzaylar tanıtılacak ve örneklendirilecektir.

BİRİNCİ BÖLÜM

MERAKLISINA TOPOLOJİ

1.1. TOPOLOJİ NEDİR, NE İŞE YARAR?

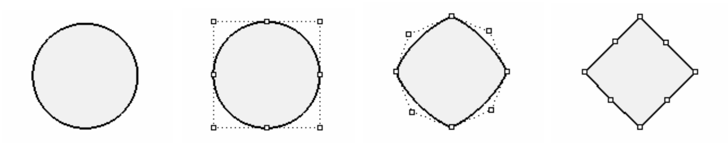
Topoloji sözcüğü Yunancada yer, yüzey veya uzay anlamına gelen topos ve bilim anlamına gelen logos sözcüklerinden türetilmiştir. Bu kelime ilk olarak 1847'de Johann Listing tarafından kullanılmıştır. Bu bölümde kısaca "Topoloji nedir? "sorusunun cevabını vermeye çalışacağız. Öncesinde kısa bir zaman yolculuğuna çıkarak topolojinin tarihçesinden bahsedelim.

Topoloji, matematiğin diğer çalışma alanlarına göre nispeten yeni bir dalıdır. 2000 yıl süre Euclid geometrisi hakim olsa da 18. ve 19. yüzyılların başlarında, bazı matematikçiler, şekillerin küresel özelliklerini göz önünde bulundurarak geometrik nesnelere farklı bakmaya başladılar. 1900'lerin başlarında ise soyut cebirsel yapıları işin içine dahil etmek için "şekil" kavramından uzaklaşan topoloji kavramı ortaya çıktı.

Topoloji, kesmeden, delmeden veya birbirine yapışmadan sürekli gerdirme veya bükme yoluyla şekillerin birbirine dönüşümleri ile ilgilenir. Hatta bu yüzden topolojiye bazen **"lastik levha geometrisi"** de denir.

Topoloji her ne kadar matematiğin ana dallarından biri olsa da günlük hayatta birçok alanda kullanılmaktadır. Örneğin, topoloji matematiksel modelleme ve veri analizi için kullanılır. Ayrıca, topoloji mühendislikte ve bilgisayar bilimlerinde de örneğin, bir nesnenin şeklini veya yüzeyini analiz etmek için kullanılabilir. Topoloji ayrıca uzay araştırmalarında, uzayda nesnelerin şekillerini ve yüzeylerini analiz etmek için kullanılabilir. Topoloji daha birçok uygulama alanına sahiptir. Bu alanlardan ileriki bölümlerde "Uygulama Alanları" başlıkları altında detaylı olarak bahsedilecektir.

Topoloji, herhangi bir sürekli deformasyon altında değişmez olan uzayların özelliklerini inceler. Bazen "lastik levha geometrisi" olarak da adlandırılmasının nedeni nesnelerin lastik gibi gerilebilir ve büzülebilir, ancak kırılamaz olmasıdır. Örneğin, bir kare kırılmadan daire şeklinde deforme olabilir, ancak 8 rakamı olamaz. Dolayısıyla bir kare, topolojik olarak bir daireye eşdeğerdir, ancak bir şekil 8'den farklıdır.



Şekil 1: Topolojik olarak bir dairenin kareye dönüşümü (Tarım, 2006)

Topoloji, nesnelerin deformasyonları, bükülmeleri ve gerilmeleri yoluyla korunan özelliklerin matematiksel çalışmasıdır ve yırtılmaya izin verilmez. Deformasyonlar sonucu korunan özelliklere de **topolojik özellikler** denir. Bir daire topolojik olarak bir elipse eşdeğer iken bir küre bir elipsoide eşdeğerdir. Benzer şekilde, bir saatin akrebinin olası tüm konumlarının kümesi, topolojik olarak bir daireye eşdeğerdir.

Topolojik dönüşümler ile bir şeklin noktalarına başka bir şeklin noktaları tekabül ettirilir; fakat metrik özelliklerin değil, metrik olmayan özelliklerin korunması önemlidir. Böylece şekiller değişmeye uğrarlar, fakat topolojik özellikleri korunur. Örneğin, bir karenin bir çember üzerine resmedilmesi veya tersine bir çemberin bir kare üzerine resmedilmesi birer topolojik dönüşümdür. Burada dönüşüm birebirdir ve uzunlukları korumaz. Şekil deforme olmakla birlikte şekiller üzerindeki noktalara ait sıralama ve basit kapalı bir eğri olma özelliği korunmaktadır Kare ve çember kendi kendilerini kesmeyen birer eğridirler. Bütün topolojik dönüşümlerde basit kapalı şekiller yine kapalı şekil olarak kalırlar. Topoloji, nesnelerin ayrıntılı formlarını göz ardı ederken, nesnelerin doğal bağlantılarını soyutlamak için kullanılabilir.

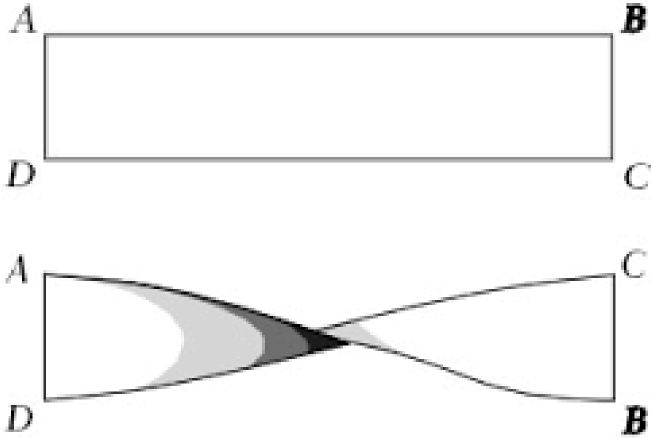
1.1.1. Mobius Şeridi

Euclid geometrisiyle topoloji biliminin ilintili durumu 19. Yüzyıl sonlarında değişmeye başlamıştır ve daha esnek olan bir geometri türü ortaya çıkarılmıştır. Sonuç olarak zaman içerisinde topoloji statüsü hızla yükselmiş ve matematik biliminin içerisine dâhil olmuştur. Topoloji bilimi 19. Yüzyılda ortaya çıkmış olsa da aslına bakılırsa tarih sahnesinde bazı dönemlerde belirginleştiği zamanlar olmuştur. Hatta matematiğin yazılı tarihine bakıldığında geçmişi Antik Yunanlılara kadar dayanmaktadır.

Topoloji tanımı ortaya çıkmadan önce, topolojiyle ilgili olan temel iki öğeyi bir bilim adamı olan Euler öne sürmüştür. Bu iki temel öğelerden biri "Königsberg Köprüleri" iken diğeri de "Euler'in Çokyüzlüler Formülü" bulmacalarının çözümüdür.

Euler'in yanı sıra Gauss da topoloji hakkında bir önseziye sahipti. Manyetizmanın üzerine yaptığı çalışmalar, günümüzde geçişme sayısı şeklinde adlandırılan bir topolojik değişmezi göstermiştir. Fakat topolojinin gelişiminde Gauss'un etkisinin yanında kendisinin öğrencisi Johann Listin ile asistanı olan Augustus Möbius'un da etkisi vardır. Yunanca 'da uzay ya da yüzey anlamında olan topos kelimesiyle bilim anlamındaki logos kelimesinden türeyen topoloji sözcüğünü ilk kez 1834 senesinde Listing **"Topoloji İçin Ön Çalışma"** isimli eserinde kullanmıştır.

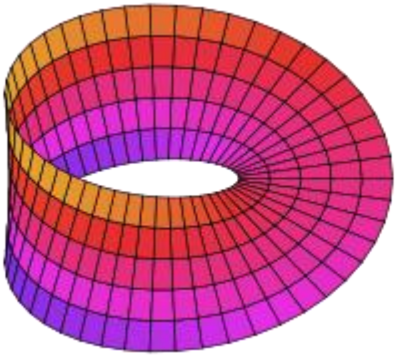
Şimdi Mobius şeridini tanıyalım. Normal şekilde bir yüzeyde iki taraf olur. Örneğin topun içi ve dışı iki farklı yüzeydir. Bir yüzeyden öbür yüzeye geçebilmenin yolu ise delik açmaktır. Fakat topoloji de böyle bir şeye izin verilmez. Tek tarafı olan bir yüzeyin nasıl olabileceği başlarda akıl almaz gibi görünse de Alman gök bilimci ve matematikçi August Möibus böyle bir şekil keşfetmiştir. Bu şeklin elde edilebilmesi için yapılması gereken, kâğıt bir şeridin bir ucunun, bir tur döndürülüp diğer uçla birleştirilmesidir. Oluşan bu şekile **Möbius şeridi** denilir.



[1]Şekil 2: Möbius şeridinin elde edilişi

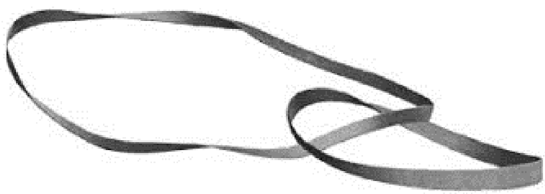
Elinizdeki kâğıt şeridin iki yüzü vardır. Bir yüzünü maviye, öbür yüzünü kırmızıya boyayalım. AD ile CB kenarlarını A ile C köşeleri ve B ile D köşeleri üstüste gelecek biçimde yapıştıralım. Böylece bir Möbius şeridi elde etmiş oluruz. İki yüzü olan kağıt şeridinden elde ettiğiniz Möbius şeridinin kaç yüzü vardır peki? İki gibi gözükükse ve beklenti de o yönde olsa da Möbius şeridinin iki değil bir yüzü vardır. Yani yürüyerek (cambazlık yapmadan) Möbius şeridinin önünden arkasına geçebilirsiniz. Ayrıca Möbius şeridinin bir kenarı vardır. Bir kenarı durmadan izlerseniz, başladığınız yere dönersiniz.

[1] https://artigercek.com/populer-matematik/bir-mobius-seridinin-kac-yuzu-vardir-176885h



[2]Şekil 3: Mobius Şeridi

Şimdi Möbius şeridinin ortasından uzunlamasına bir çizgi çizelim. Möbius şeridinin tek yüzü olduğundan, elinizi hiç kaldırmadan başladığınız yere geri döneceksiniz. Bu çizgiyi izleyerek Möbius şeridini keselim. Böylece aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi çift döngülü ve daha uzun bir şeritle iç içe geçmiş bir Mobius şeridi elde ederiz. Ne kadar ilginç değil mi?



[3]Şekil4: Kesilmiş Mobius Şeridi

[2,3] https://artigercek.com/populer-matematik/bir-mobius-seridinin-kac-yuzu-vardir-176885h

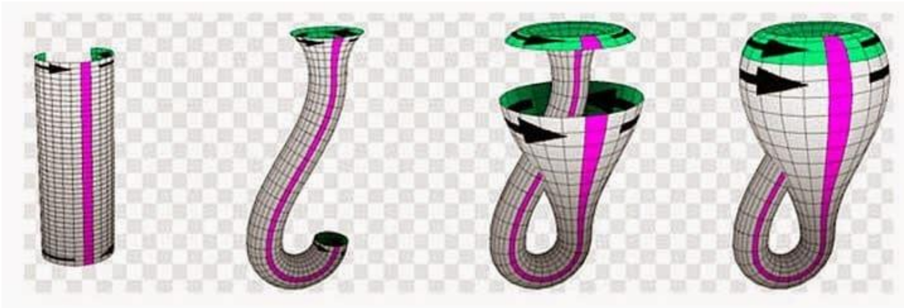
1.1.2. Klein Şişesi

Möbius şeridine benzer biçimde elde edilen Klein şişesi ise tek bir ağızdan oluşmaktadır. Yine aynı biçimde tek yüzü vardır, aslında bunun tek sebebi kapalı bir yüzey olmasındandır. Klein şişesinin bundan dolayı iç yüzeyi olmayıp sadece dış yüzeyi vardır. Yukarıda bahsettiğimiz gibi Klein şişesinin tek ağzı vardır ve bu, içine dökülen herhangi bir sıvının yine aynı açıklıktan dökülmesinden açıkça anlaşılır. Sakın bu şişeyi sürahi olarak kullanayım demeyin!

[4]Şekil 5: Klein Şişesi

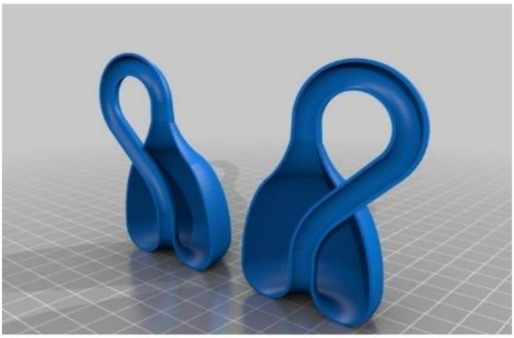
Möbius şeridi ve Klein şişesinin benzer yollar ile elde edildiğini söyledik. Aralarındaki fark ise Möbius şeridini üç boyutta gösterebilmemize rağmen, Klein şişesi için dört boyuta ihtiyacımız vardır. Möbius şeridi için, dikdörtgen biçimindeki şeridi uçlarından 180 derece ters olacak şekilde yapıştırırken, Klein şişesi için bir silindiri 180 derece ters olacak şekilde birleştiririz.

[4] https://www.muhendisbeyinler.net/klein-sisesi-ve-matematiksel-illuzyon/



[5]Şekil 6: Silindirden Klein şişesinin elde edilişi

Klein şişesini tam ortasından kestiğimizde iki adet Möbius şeridi elde etmemiz ise oldukça şaşırtıcıdır.



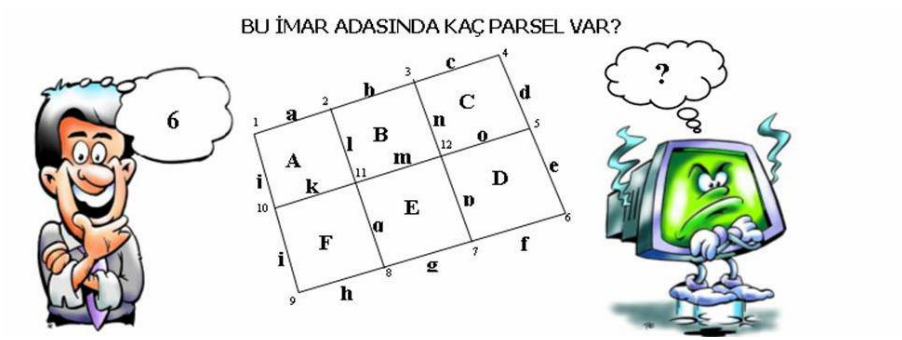
[6]Şekil 7: Tam ortasından kesilmiş Klein şişesi

[5] http://geometriogretimi.blogspot.com/2017/11/bir-seritten-sise-olur-mu.html
[6] https://www.muhendisbeyinler.net/klein-sisesi-ve-matematiksel-illuzyon/

1.2. TOPOLOJİNİN MATEMATİK ALANI DIŞINDAKİ UYGULAMA ALANLARI

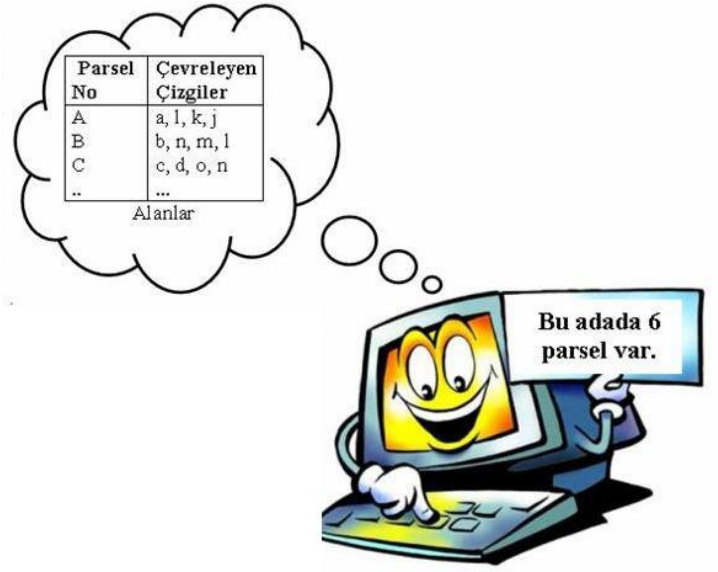
Topoloji günlük hayatta birçok alanda kullanılmaktadır. Örneğin, topoloji matematiksel modelleme ve veri analizi için, mühendislikte ve bilgisayar bilimlerinde, uzay araştırmalarında bir nesnenin şeklini veya yüzeyini analiz etmek için, coğrafi bilgi sisteminde, haritalamada, ağ sistemlerinde, fizik alanında, moleküler biyoloji ve genetik alanında uygulama alanlarına sahiptir. Günlük yaşamımızda genellikle topolojinin işe yaramayacağını düşünürüz, oysaki bizi şifreleyen DNA'mızda, bizim kim olduğumuzu ele veren parmak izimizde, avuç içimizde kısacası insan vücudunda bile topolojinin izleri vardır.

Topoloji bilimin her alanında ve günlük yaşantımızda karşımıza çıkmaktadır. Bilgisayarlar bizlerin hayatını kolaylaştırırken cevabını veremediği sorularla da karşılaşmıyor değiller.



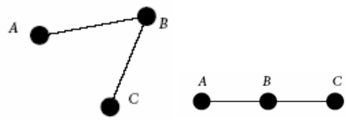
Şekil 8: Topolojinin uygulama alanları (Tarım, 2006)

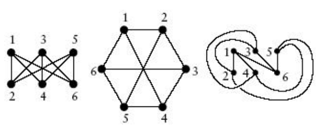
Şaka bir yana şimdi Şekil 8'deki görselde yer alan imar odalarının parsellerini bir topolojik yaklaşımla sınırları ile ifade edecek şekilde bir tablo oluşturalım. Bu bilgileri bilgisayara veri olarak sunup Şekil 9'da görüldüğü gibi soruyu tekrarlayalım.

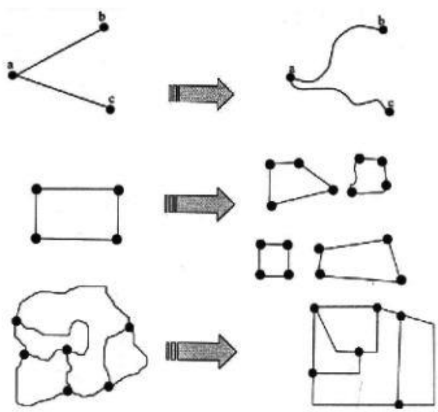


Şekil 9: Topolojinin uygulama alanları (Tarım, 2006)

Artık sorunun yanıtını bilgisayardan da alabiliriz. Topolojinin sağladığı kolaylıklardan bir diğerini vermeden önce aşağıdaki şekillerin topolojik olarak aynı olduğunu belirtelim.

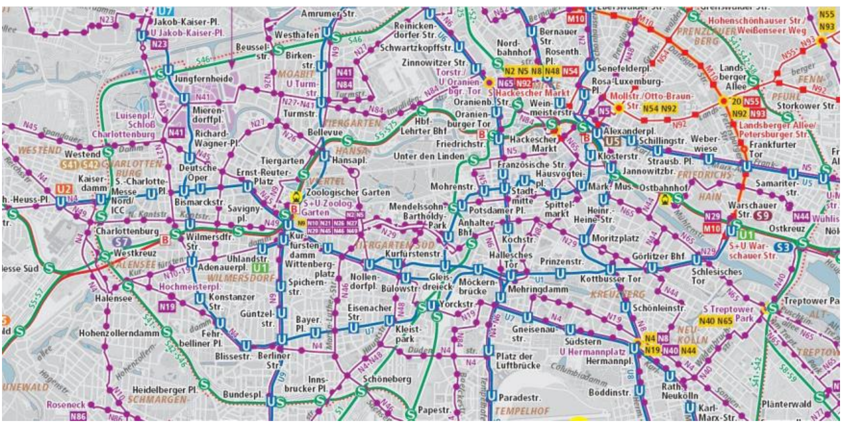






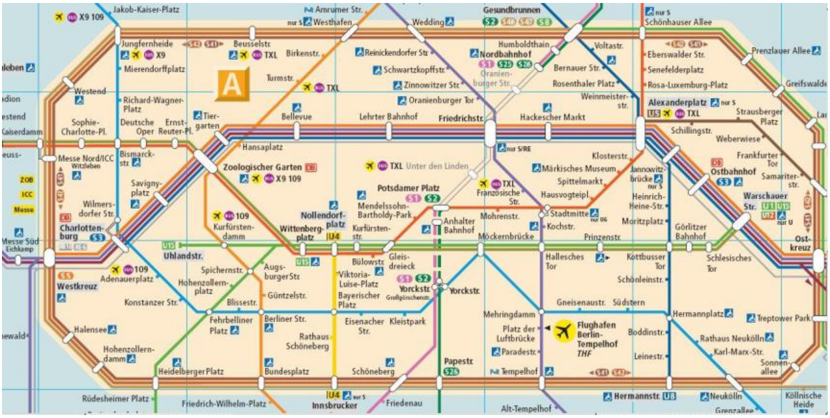
Şekil 10: Topolojik olarak eşdeğer şekiller (Batuk, Karaş 2005)

Şimdi yukarıdaki görselde topolojik olarak eşdeğer olan bu minimal şekillerin aslıda büyük boyutlara taşındığında ne kadar önemli olduğunu görelim. Alın size karmaşık, birbiri içine dolanmış bir harita.



Şekil 11: https://pubsonline.informs.org/do/10.1287/orms.2006.02.13/full/

Şimdi bu haritayı topoloji mantığı ile aşağıdaki gibi yeniden düzenleyelim.



Şekil 12: https://pubsonline.informs.org/do/10.1287/orms.2006.02.13/full/

Çok daha anlaşılır değil mi? Ayrıca günlük hayatta sıkça karşılaştığımız ve özünde topoloji yatan birçok alan vardır. Örneğin metrolarda durakları gösteren haritalar. Metrolarda, yolcuları bilgilendirmek amacı ile çıkış kapılarının üstündeki, durakların dizilişini gösteren şemalar aslında tamamen topolojik bir yaklaşımla çizilmiştir. Çünkü söz konusu olan sadece durakların sıralanışıdır ve şemanın bu haliyle yolculara verdiği bilgi hangi duraktan sonra hangisinin geldiğidir. Aşağıda karmaşık bir İstanbul ilçeler haritası var. Metrolarda durakları gösteren harita olarak bu haritanın kullanıldığını düşünsenize.

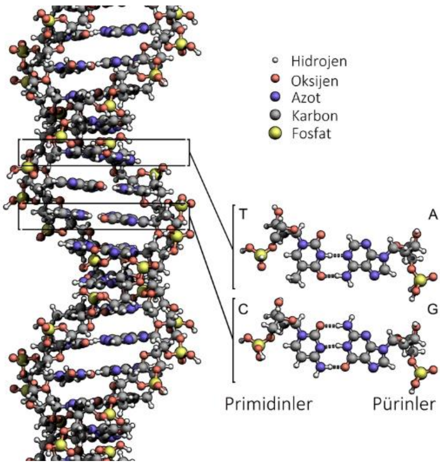
Şekil 13: https://www.insaatderyasi.com/uskudar-beykoz-metro-guzergahi-7053h.htm

Aslında metroya binen yolcu için kaç durak sonra ineceğidir önemli olan. Yolcu duraklar arası mesafe ile ya da ilçe ve semt haritası ile ilgilenmez. Dolayısıyla metro duraklarının topolojik yaklaşımla gösterimi ile duraklar arasındaki mesafe, birbirlerine göre doğrultuları, yönleri yani metrik bilgilerin tamamı ihmal edilmiş ve metronun yol haritası topolojik bir dönüşüm geçirerek aşağıdaki hale getirilmiştir. Sonuç olarak topoloji mantığıyla hazırlanmış daha anlaşılır ve amaca uygun şu güzergâh haritası çok daha kullanışlıdır.

Şekil 14: Metro Haritası (Tarım, 2006)

Daha önce belirttiğimiz gibi topoloji metrik özellikler olan uzaklık ve büyüklük ile ilgilenmez. Ancak topolojide komşuluklar ve sınırlar önemlidir.

Moleküler biyoloji ve genetik alanında, belirli enzimler tarafından DNA çevresinde oluşturulan düğümlerin çözülmesine yardımcı olmak gibi çeşitli uygulamaları vardır. Doğa ile bilimin yasalarının birebir örtüştüğünün çarpıcı bir kanıtı da DNA' nın yapısının geometri ve topoloji ile olan ilişkisidir. DNA moleküllerinin bağlanma, kıvrılma, bükülme sayıları ile yüzey bağlanma ve döngü sayılarının sürekli deformasyonlar altında diferansiyel topolojik değişmezlerdir. Aşağıda görseli verilen çift sarmallı bir DNA kesitidir.

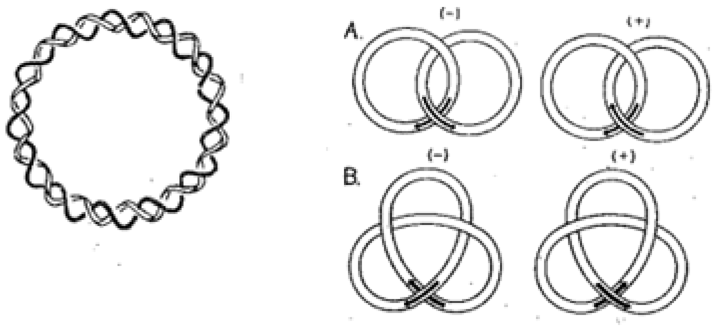


[7]Şekil 15: DNA'nın moleküler yapısı

Kırmadan, kesmeden, yapıştırmadan veya delmeden germe veya sıkıştırma yoluyla yapılan deformasyonlar sonucunda değişmeyen özellikleri topolojik özellik (değişmez) olarak tanımlamıştık. Bu anlamda DNA'nın üç önemli topolojik özelliği vardır.

[7] https://bilimfili.com/dnanin-molekuler-yapisi

Bu topolojik özelliklerden ilki, çift sarmallı veya ikiz şeritler adını verebileceğimiz DNA molekülünde bulunan şeritleri birbirine bağlayan ve bağlanma diyeceğimiz sayıdır. Bir diğer topolojik özellik ise farklı DNA halkalarının birbiri içine geçtiği iç içe halkalardır. Son olarak farklı DNA halkalarının oluşturduğu düğümler de bir topolojik özelliktir.



Bağlanma Sayısı — A. İç içe halkalar (yönlü)
B. Düğümler (yönlü)

Şekil 16: Yılmaz ve ark., 2005

Fizik alanında topoloji, fiziksel sistemlerin özelliklerini incelemek için kullanılır. Kuantum alan teorisinde, yoğun madde fiziğinde ve sicim teorisinde kullanılırlar. Sicim teorisini tanımlamak veya gözlemlenen verilere uyan evrenin şeklinin modellerini oluşturmak için fizikte ayrı bir öneme sahiptir.

Topoloji Veri Analizinde veri kümelerinin şeklini ve yapısını incelemek için kullanılır. Topolojik veri analizi, karmaşık veri kümelerini analiz etmek için topolojik yöntemleri uygulayan bir alandır.

Topoloji, bilgisayar ağ sistemlerinin tasarlanmasında da kritik önem taşır. İş istasyonlarının, anahtarların ve sunucuların düzeni, ağın fiziksel topolojisini oluşturur. Bu veri iletme kapasitesini ve hızını büyük ölçüde etkiler.

Bir diğer uygulama alanı ise Coğrafi Bilgi Sistemi yazılımlarıdır. Bu yazılımların tabanında topolojik yaklaşım yatmaktadır. CBS yazılımı, coğrafi veriyi gerektiği gibi analiz edebilmek için topolojik ilişkileri içermeye mecburdur. CBS yazılımını herhangi bir bilgisayar destekli harita yazılımından ayıran en temel özellik de budur. Her ne kadar matematiğin bir dalı olarak topoloji, varlıkların metrik özelliklerinden çok birbirleriyle olan ilişkileri ile ilgilense de CBS'de topoloji; coğrafi varlıkların birbirleriyle nasıl ve ne şekilde ilişkilendirildiğini geometriden bağımsız şekilde gösterme biçimi olarak tanımlanır.

1.3 İLKÖĞRETİM VE ORTAÖĞRETİMDE TOPOLOJİ

Bu bölümde topolojinin lisans öncesi düzeylerde nasıl ele alınabileceğine dair bir araştırma sonuçlarından bahsedilecektir. Üniversitelerde okutulan bir ders olan topoloji acaba ilköğretim ve ortaöğretimde de okutulabilir mi? Bu sorunun yanıtı ile birlikte topolojinin en basit anlamda ifadesini vermiş olacağız.

Yüzyıllar boyunca geometri öğretiminde Euclid geometrisi ağırlıklı olarak kullanılırken, matematiğin gelişmesi ve geometrinin farklı alanlara yayılması, geometri eğitiminin güncellenmesini gerektirir hale gelmiştir. Bu bağlamda, 2016 yılında Ali Delice ve K. Gizem Karaaslan tarafından yapılan bir çalışma, topolojinin ilkokul, ortaokul ve lise düzeylerinde matematik eğitiminde nasıl ele alındığını incelemiştir. Araştırmada, topolojinin eğriler, çizgiler, yüzeyler ve topolojik dönüşümler gibi temel konularına odaklanıldığı ve bu konuların içeriğinin belirlendiği görülmüştür. Bu çalışmanın sonuçlarına dayanarak, topolojinin ilkokul, ortaokul ve lise matematik öğretim programlarına entegre edilebileceği ve bu entegrasyonun potansiyel katkılarının tartışılabileceği çıkarımı yapılmıştır.

Geometri, matematikle yaşam arasında bağlantı kurmada görsel ve cebirsel temsillerin uzamsal yeteneklerle birleştirildiği önemli bir alandır. Tarih boyunca geometri, Euclid geometrisinin etkisi altında gelişmiş ve 17. yüzyıla kadar aksiyomatik bir yaklaşımla şekillerin metrik özellikleri ile sınırlı kalmıştır. Ancak daha sonraki dönemlerde, şekillerin metrik olmayan özellikleri de önem kazanmıştır. Özellikle 19. yüzyılın ortalarından itibaren, projektif geometri, afin geometri ve topoloji gibi yeni geometri sistemleri, matematik sahasında yer bulmuştur. Günümüzde 50'den fazla geometri türü bulunmaktadır.

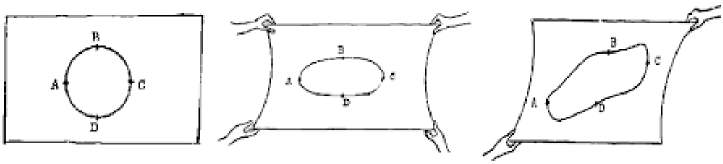
Matematik dersleri, ilkokul, ortaokul ve lise seviyelerinde somut deneyimlere ve öğrencilerin kendi kendilerine öğrenmelerine dayandırılarak sunulmalıdır. Matematiksel kavramlar ve özellikler, somut deneyimlerden ve sezgilerden yola çıkarak öğrenciler tarafından oluşturulmalıdır. Bu bağlamda, matematik programlarında bazı farklılıklar bulunmaktadır. Örneğin, programlarda fraktal geometri, doğanın modellemesinde başarılı bir araç olarak kabul edilmiştir. Fraktal geometri, gerçek yaşamın yanı sıra programın amaçlarına ulaşmada kullanılabileceğine vurgu yapmıştır. Ayrıca, Euclid geometrisine alternatif olarak Euclid dışı geometrilere de kısa bir giriş yapılmıştır.

Geometri türlerini sınıflandırırken, dönüşümler altında değişmeyen özelliklere dayanılmıştır. Bu sınıflandırmaya göre, en geniş geometri kapsamının topoloji olduğu söylenebilir. Euclid geometrisinde dönüşümler uygulandığında uzunluk, açı ölçüleri gibi daha fazla özellik korunurken, topoloji daha az sayıda özelliği korur.

Topoloji matematiğin bir alt dalıdır ve matematiğin farklı alanlarına daha geniş bir bakış açısı sunar. Temel olarak küme teorisi ve geometriyi içeren bu matematik alanı, matematiksel konuları daha geniş bir perspektiften ele almamıza yardımcı olur. Geometrinin bir genişlemesi olan topoloji, Euclid geometrisinden farklı bir şekilde nesnelerin elastik dönüşümler altında incelenmesini içerir. Topolojik dönüşümler, yer değiştirmek, germek, döndürmek, bükmek, çekmek ve sıkıştırmak gibi elastik hareketleri içerir. Topoloji, metrik olmayan özelliklerin korunduğu bir alandır ve bu nedenle matematiği daha geniş bir perspektiften anlamamıza yardımcı olur.

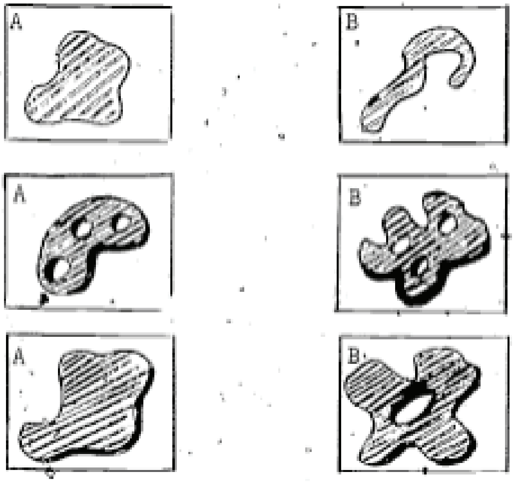
Son yıllardaki çalışmalar, öğrencilerin geometrik kavramları kendiliğinden geliştirdiklerini ve topolojinin bu konuda onlara yardımcı olabileceğini göstermektedir. Öğrencilerin topoloji konularıyla uğraşması, onları yüzeyleri, eğrileri ve nesneleri hayal etmeye teşvik eder. Ayrıca topoloji, elastik dönüşümler yoluyla nesneleri dönüştürmeyi öğrencilere öğretir. Bu nedenle topolojinin matematik eğitim programlarında yer alması, öğrencilerin uzamsal görselleme becerilerini geliştirmelerine katkı sağlayabilir.

Örneğin, topolojik dönüşümlere daha informal olarak yaklaşarak ve dönüşümlerden bahsederek esnetme, deforme etme gibi işlemlerden yola çıkılarak konu anlatımı gerçekleştirilebilir. Daha anlaşılır olmaları için eğrilerin esnetilme işlemi birkaç adımda aşağıda verilmiştir.

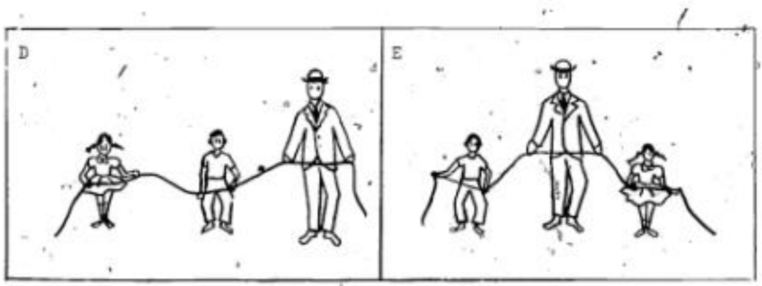


Şekil 17: Düzlem üzerindeki bir çemberin deformasyonu (Delice ve Karaarlan, 2016)

Topolojik dönüşümleri deformasyon süreçlerine odaklayan bir çalışmaya ait bir başka örnek, Şekil 18'de gösterildiği gibi sunulmuştur. ve etkinlikte çeşitli nesneler verilerek bu nesnelerin birbirine dönüştürülüp dönüştürülemeyeceği düşündürülmüştür. Ayrıca topolojik dönüşümlere odaklanan çalışmalarda, şekillerin biçiminin değişmesi vurgusu hemen hemen tüm çalışmalarda bulunurken, aynı zamanda bazı çalışmalarda topolojik dönüşümlerle ilişkilendirilen sıra ve komşuluk kavramlarına da değinilmiştir. Bu çalışmaların yarısından fazlasında, sıra ve komşuluk kavramları, eğriler veya yüzeyler üzerindeki noktaların sıralanma durumlarına daha basit bir şekilde yaklaşılarak ele alınmıştır ve bu durum aşağıda şekil 19'da resmedilmiştir (Gurdces, 1969).



Şekil 18: Etkinlik örneği (Gurdces, 1969).



Şekil 19: Sıra ile ilgili örnekler (Gurdces, 1969).

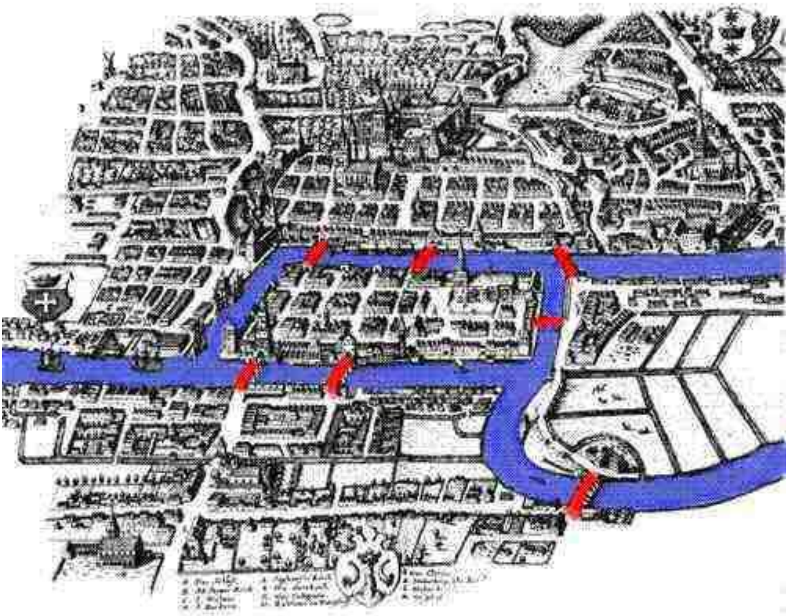
İKİNCİ BÖLÜM
MATEMATİK ALANINDA TOPOLOJİ

2.1. MATEMATİK VE TOPOLOJİ

Özellikle 19. yüzyılın sonlarına doğru Henri Poincaré' nin çalışmalarıyla sağlam temellere oturan, 1950'lerde altın çağını yaşayan ve 20. yüzyılda Felix Hausdorff tarafından geliştirilen topoloji, matematikte, geometrik şekillerin bükme, germe, uzatma veya sıkıştırma sonrasında değişmeyen özelliklerini inceleyen bir disiplindir. Klasik geometriye katı cisimler olarak bakmak yerine, matematikçiler geometriyi şekilleri lastik gibi elastik bir malzeme olarak düşünerek incelemişlerdir. Topoloji kelimesi Yunanca'da "yer," "yüzey" veya "uzay" anlamına gelen "topos" ve "bilim" anlamına gelen "logos" kelimelerinden türetilmiştir. Topoloji biliminin kurulduğu dönemlerde, 19. yüzyılın ortalarında, bu terimin yerine Latince "analysis situs" (konumun analizi) terimi kullanılmıştır.

Son yıllarda büyük gelişmeler kaydeden ve diğer ülkelerdeki matematiksel ilerlemelerle paralel olarak Türkiye'de de pek çok araştırmacının ilgi gösterdiği topoloji, basitçe, topolojik değişmezleri, iki yönlü sürekli fonksiyonlar altında değişmeyen özellikler olarak inceleyen geniş bir matematik dalıdır. Topolojinin uygulama alanı analizden geometriye kadar oldukça geniştir. Herhangi bir eğri, yüzey, eğriler ailesi veya fonksiyon kümesi bir topolojik uzay olarak düşünülebilir.

Topoloji, matematiğin sadece ölçüm ve sayılarla ilgili bir alan olmadığını göstererek bu algıyı da değiştirmiştir. Topoloji, uzunluk, alan gibi ölçülebilir değerlerle değil, nesnelerin örtüşme, bağlantı ve uzamsal ilişkileriyle ilgilenir. İlk olarak Euler'in 1736'deki çalışmasıyla başlangıcını görebiliriz. Euler, Königsberg köprüleri problemi üzerine yayınladığı makalede mesafe ve ölçümle ilgilenmek yerine farklı bir geometri türünü ele almıştır. Bu makale sadece yedi köprüyü tek bir yolculukta geçmenin imkansız olduğunu göstermekle kalmamış, aynı zamanda problemin modern notasyonla nasıl genelleştirilebileceğini göstermiştir.



[8]Şekil 20: Königsberg köprüsü

Topoloji, çağdaş matematiğin hemen hemen her dalında temel bir rol oynar. Topoloji, nokta-küme topolojisi, cebirsel topoloji, ve diferansiyel topoloji gibi birbirinden oldukça farklı dallardan oluşur, ancak bu farklı disiplinler arasında genellikle sınırlı ortaklık bulunur.

Topolojinin alt alanlarından bazılarını aşağıdaki gibi verebiliriz.

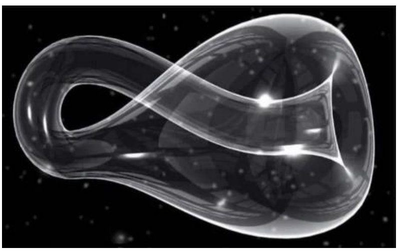
Genel Topoloji veya Nokta Küme Topolojisi, genellikle yerel özelliklere odaklanan bir dal olup analizle yakından ilişkilidir. Bu yaklaşım, topolojik uzayları tanımlamak için süreklilik kavramını genelleştirir ve bazen bu uzaylarda mesafeler tanımlanabilir, böylece

[8] https://topologistan.com/2021/03/18/her-sey-birdenbire-mi-oldu-geometriden-topolojiye-bir-yol-gider/

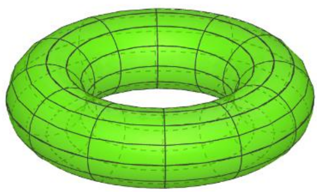
bunlara metrik uzaylar denir. Ancak bazı durumlarda bu uzaylarda mesafe kavramı anlamsızdır.

Kombinatoriyel Topoloji, uzayların temel özelliklerini inceleyen bir dal olup, köşeler, kenarlar ve yüzler ağından oluşan uzayları ele alır. Bu dal, topolojinin en eski dallarından biridir ve Euler'e kadar uzanır. Kombinatoriyel Topoloji, topolojik olarak eşdeğer uzayların aynı sayısal değişmezliğe sahip olduğunu gösterir, bu özellik şimdi Euler karakteristiği olarak adlandırılır. Euler karakteristiği, V, E ve F ile temsil edilen bir nesnenin köşe, kenar ve yüz sayısından türetilir. Herhangi bir dışbükey çokyüzlünün yüzeyi Euler karakteristiğine sahiptir ve V-E+F=2 ile Euler karakteristiği 2 olacaktır.

Cebirsel Topoloji ise uzayların genel özelliklerini inceleyen ve cebirsel nesneleri, gruplar ve halkalar gibi kullanarak topolojik sorunları ele alan bir dal olarak karşımıza çıkar. Cebirsel Topoloji, topolojik problemleri çözmeyi daha kolay hale getiren bir cebirsel probleme dönüştürme yöntemlerini kullanır. Örneğin, her boşluğa karşılık gelen bir homoloji grubu vardır ve torus ile Klein şişesi gibi farklı topolojik uzaylar, farklı homoloji gruplarına sahip oldukları için ayırt edilebilirler.



Şekil 21: Klein şişesi



Şekil 22: Torus

Cebirsel topoloji bazen bir uzayın kombinatoryal yapısını o uzayla ilişkili çeşitli grupları hesaplamak için kullanır.

Diferansiyel Topoloji, matematikte bir dal olan topolojinin daha özelleşmiş bir alt dalıdır. Daha spesifik olarak, diferansiyel topoloji, topolojik uzaylarda sürekliliği ve düzgünlüğü inceleyen bir matematik dalıdır. Bu disiplin, topolojik uzayların her noktasında bir tür pürüzsüzlük yapısının nasıl tanımlanabileceğini ve nasıl anlaşılabileceğini araştırır. Diferansiyel topoloji, vektör alanları gibi manyetik veya elektrik alanların özelliklerini incelemek için kullanışlıdır.

Topoloji, matematiğin birçok dalında kullanılır. Türevlenebilir denklemler, dinamik sistemler, düğüm teorisi ve Riemann yüzeyleri gibi konularda geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir. Aynı zamanda fizikte, sicim teorisi ve evrenin uzay-zaman yapısını açıklamak için kullanılır. Topolojinin çok yönlü ve yaygın bir matematiksel uygulama alanı olduğu görülür.

Daha önce bahsedildiği gibi birbirlerine, kesmeden, yapıştırmadan, koparmadan deforme edilebilen şekiller topolojik olarak eşdeğer kabul edilir, örneğin donut ve kahve fincanı.

[9]Şekil 23: Kupanın donuta dönüşümü

Topolojinin bu tanımı aşağıdaki matematiksel şakaya yol açar (Renteln ve Dundes 2005):

[9] https://www.printables.com/model/167441-topology-joke

A: Topolog kimdir?

B: Donutla kahve fincanını ayırt edemeyen kişi.

Matematiğin ana dallarından biri olan topoloji, ölçümler olmadan şekillerin incelenmesidir. Topoloji yüzeylerin özelliklerini, genel şekillerini inceleyen geometri dalıdır ve daha öncede belirttiğimiz gibi topoloji bilimi, fizik, kimya, biyoloji, bilgisayar bilimi gibi birçok alanda kullanılır.

Bir sonraki başlığımızda anlatacağımız topolojik uzay tanımı için bir ön hazırlık yapalım. Topolojik uzay bir X kümesi ve bu kümenin alt kümelerinin bir kısmını içeren ve belli varsayımları sağlayan τ ailesinden oluşur. Topolojik uzayların çeşitleri arasında ayrık (taneli) topoloji, reel sayılar üzerindeki topoloji, metrik uzaylar, iç çarpım uzayları ve Banach uzayları sayılabilir.

Topolojik uzaylarla ilgili matematik dalları arasında topoloji, cebirsel topoloji, fonksiyonel analiz ve diferansiyel geometri sayılabilir. Bu dallar, topolojik uzayların özelliklerini, süreklilik, yakınsama, boyut, homotopi, homoloji gibi kavramlarla inceler.

Topolojide birçok kavram vardır. Bunlardan bazıları, açık küme, kapalı küme, tıkız küme, sürekli fonksiyon, yakınsama, ayırma aksiyomu, topolojik grup, boyut teorisi, homotopi ve homolojidir. Topolojideki bu kavramların tanımları ve özellikleri çok geniş bir konu olup, bu konulardan bazılarına bir sonraki başlıkta yer vereceğiz. Ama önce kısaca ifade ederek sizleri bu kavramlar ile tanıştırmak istiyoruz.

• **Açık küme:** Bir kümenin her noktasının, kümenin içinde kalan bir açık diski (yuvarı) olduğunda, o kümeye açık küme denir.

• **Kapalı küme:** Bir kümenin tümleyeninin açık olması durumunda, o kümeye kapalı küme denir.

• **Tıkız küme:** Bir kümenin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü olduğunda, o kümeye tıkız küme denir.

• **Sürekli fonksiyon:** Bir fonksiyonun, değer kümesindeki her açık kümenin ters resmine karşılık, tanım kümesinde de açık bir küme vermesi durumunda, o fonksiyona sürekli fonksiyon denir.

• **Yakınsama:** Bir dizisinin terimlerinin, bir noktaya gittikçe yaklaşması durumunda, o dizinin o noktaya yakınsadığı söylenir.

• **Ayırma aksiyomları:** Topolojik uzaylarda noktaların veya kümelerin birbirinden ne kadar ayrılabilir olduğunu ölçen aksiyomlardır. Örneğin, T_0 aksiyomu her iki noktadan en az birinin diğer elemanı içermeyen bir komşuluğunun olduğunu söyler.

• **Topolojik gruplar:** Hem topolojik uzay hem de grup yapısına sahip olan ve bu iki yapının uyumlu olduğu matematiksel nesnelerdir. Örneğin, gerçel sayılar hem topolojik uzay hem de grup olarak düşünülebilir.

• **Boyut teorisi:** Topolojik uzayların boyutlarını tanımlayan ve sınıflandıran matematik dalıdır. Örneğin, bir doğru parçasının boyutu 1, bir dairenin boyutu 2, bir kürenin boyutu 3'tür.

• **Homotopi:** Topolojik uzaylarda şekillerin sürekli olarak birbirine dönüştürülmesini inceleyen matematik dalıdır. Örneğin, bir çöreğin topolojik olarak bir kahve fincanına homotopik olduğu söylenir.

• **Homoloji:** Topolojik uzaylarda şekillerin delik sayıları gibi özelliklerini inceleyen matematik dalıdır. Örneğin, bir çöreğin homoloji grupları, çöreğin kaç tane deliği olduğunu gösterir.

2.2. NEDEN TOPLOJİK UZAYLAR?

Şimdiye kadar da söz ettiğimiz gibi, topolojinin çalışma alanı çok geniştir. Dolayısıyla analizden geometriye kadar geniş bir uygulama alanına sahiptir. Analizin temel kavramları olan fonksiyonların sürekliliği, türevlenebilirliği, analitikliği ve dizilerin, serilerin yakınsaklığı gibi kavramlar analiz dışında örneğin topoloji, diferansiyel geometri, metrik uzaylar, fonksiyonel analiz gibi alanlarda da karşılaştığımız ifadelerdir. Bütün bu konuların ifadesinde kullanılan ortak kavram ise açık küme yada özel bir açık küme olan açık aralıktır. Açık kümelere bağlı olan bu kavramlar ilk olarak Analiz 1,2 derslerinde verilmiş ve sonrasında bu kavramların birden büyük boyutlu Euclid uzaylarına genellemesi Analiz 3,4 derslerinde verilmiştir. Ayrıca Karmaşık Analiz dersinde de açık kümeler yardımıyla bu kavramalar tanımlanmıştır. Matematik alanındaki bu derslerde verilen bu kavramlar sadece sembolik olarak değişiklik gösterir. Örneğin, analiz derslerinde $\mathbb{R}$ gerçel sayılar alışılmış uzayında x değişkeninin bir $p \in \mathbb{R}$ noktasına olan uzaklığı $|x-p|$ ile X_d metrik uzayındaki bu uzaklık $d(x,p)$ ile $X_{\| \ \|}$ normlu uzayında ise $\|x-p\|$ ile gösterilir.

Peki metrik yani uzaklık kavramının olmadığı uzaylarda bu kavramları nasıl tanımlayabiliriz? Ya da daha açık bir dille bu kavramların tanımlanması için gerekli "açık kümeler" sadece metrik fonksiyonu yardımıyla mı verilebilir? Bir küme veya bir uzay üzerinde "topoloji" tanımlamak bu uzaydaki tüm açık kümeleri dolayısıyla da kapalı kümeleri bilmek anlamına gelir. Yani topolojik uzaylar, metrik (uzaklık) kavramı olmadan da açık küme kavramının verilebildiği genelleştirilmiş uzaylardır.

Topoloji metrik uzaylardaki yakınsaklık ve süreklilik kavramlarını daha genel uzaylarda incelememize olanak verir. Elemanlar arsındaki uzaklık kavramını kullanmadan kümeler ve kümeler ailesi ile birçok tanım vermemize ve farklı bakış açısından konulara yaklaşmamıza olanak verir. Analizde reel sayılar kümesi üzerinde süreklilik, yakınsaklık, limit gibi kavramlarda ölçüye (metrik) ihtiyaç duyulur ve dolayısıyla uzay üzerinde metrik tanımlanmadan bu kavramlardan bahsedilemez. Ancak topoloji herhangi bir uzay üzerinde de (metrik olma zorunluluğu olmadan) süreklilik, yakınsama ve limit tanımlarını vererek bu tanımları ölçüden, sayıdan, sıralamadan bağımsız hale getirmiştir. Böylece analiz konusu gerçel sayılardan soyutlanıp adına topoloji denilen çok daha genel bir konu haline gelecektir. Yani bu bölümde topoloji kavramının nereden kaynaklandığını göstermeye çalışacağız.

Daha açık bir dille gerçel sayılar kümesi üzerinde bir fonksiyonun bir noktada sürekliliğinin tanımını anımsatmakla başlayıp tanımı özel bazı kavramlardan arındırarak daha genel bir tanıma dönüştürüp analiz ile topoloji ilişkisine değinelim.

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f **fonksiyonunun** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ **noktasındaki sürekliliği,**

"$\forall \epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, $\forall x \in \mathbb{R}$ için,

$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \in$ olur."

ile tanımlıdır. Bu tanıma göre bir fonksiyonun sürekliliği için mutlak değere yani bir metriğe, δ, ε gibi reel sayılara ve sıralama bağıntısına ($<$) ihtiyaç duyulmaktadır. O halde sayıların, metriğin ve sıralamanın olmadığı herhangi bir kümede süreklilik tanımlanamaz mı? Bu sorunun yanıtı için yukarıdaki tanım adım adım sadeleştirilerek sadece bazı özel alt kümelere bağlı hale getirilmiştir (Ali Nesin, Analiz IV). Böylece daha genel bir tanım olarak sürekliliğin yeni ifadesi,

" $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $a \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $f(a)$'nın her komşuluğunun ($f(a)$'yı kapsayan her açık kümenin) ters resminin a 'nın bir komşuluğu olmasıdır (a 'yı içeren bir açık küme kapsamasıdır). "

şeklinde olacaktır. Böylece bu son tanıma göre görülüyor ki keyfi bir X uzayı üzerinde de süreklilik kavramı tanımlanabilir.

2.3. TOPOLOJİ ALANINDA ÜNLÜ PROBLEMLER

Topoloji, matematiğin önemli bir dalıdır ve birçok ünlü problem ve teoremi içerir. İşte topolojinin meşhur problemlerinden bazıları aşağıdaki gibidir.

- **Königsberg'in Yedi Köprüsü**: Bir şehirdeki yedi köprüyü bir kez geçerek dolaşmanın mümkün olup olmadığını bulmak.
- **Dört Renk Teoremi**: Bu problem, bir haritanın bölgelerini dört renkle boyayarak her iki komşu bölgenin aynı renge sahip olmamasını sağlama sorununu ele alır. Bu problem, tarih boyunca önemli bir matematiksel sorun olarak kabul edilmiştir.
- **Poincaré Tahmini**: Üç boyutlu uzayda, her noktası bir küreye eşit uzaklıkta olan bir yüzeyin, bir küreye dönüştürülebilir olup olmadığını belirlemek.
- **Knot Teorisi**: Bir ipin uçlarını birleştirerek oluşturulan düğümlerin sınıflandırılması ve özelliklerinin incelenmesi.

Poincaré Spektral Dizi Teoremi: Bu teorem, bir kompakt manifoldun (yüzeyin) Laplace operatörünün özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının özel bir şekilde sıralandığını açıklar.

Jordan Eğrisi Teoremi: Bu teorem, kapalı bir eğriyi iki bileşenli bir şekilde bölebilecek bir doğru veya eğrinin her zaman bulunabileceğini söyler.

Poincaré Kalıp Bulma Problemi: Poincaré kalıp bulma problemini çözmeye çalışan teoremler, uzayın topolojik özellikleri ile ilgili karmaşık sorunları ele alır.

Bu, sadece topolojinin ünlü problemlerinden bazılarıdır. Topoloji, oldukça derin ve karmaşık bir matematik dalıdır ve birçok farklı problem ve teorem içerir. Bu problemler ve teoremler, matematikçilerin ve araştırmacıların ilgisini çekmeye devam etmektedir.

Bu problemlerin yanı sıra, topoloji ile ilgili birçok problem ve çözümü için *Çözümleriyle Topoloji Problemleri, İsmet Karaca* adlı kitap da incelenebilir.

2.4.UYGULAMA ALANLARI

Topolojinin uygulama alanları çok çeşitlidir. Topoloji, matematiğin ana dallarından biridir ve uzay, yüzey, şekil gibi kavramları inceler. Topoloji, geometri, analiz, cebir, diferansiyel denklemler, dinamik sistemler, kriptoloji, robotik, bilgisayar bilimi gibi birçok matematiksel ve mühendislik alanında kullanılır. Topoloji, nesnelerin değişmez özelliklerini (örneğin delik sayısı, bağlantı, yönelim) araştırır ve esnek dönüşümlere (örneğin germe, büzme, bükme) dayanıklıdır. Topoloji sayesinde karmaşık problemleri basitleştirmek ve yeni kavramlar keşfetmek mümkündür.

Topolojinin tarihi, 19. yüzyılın ortalarına kadar uzanır. O zamanlar, topoloji yerine Latince analysis situs terimi kullanılırdı. Topoloji sözcüğü ise ilk olarak Augustus Möbius tarafından 1800'lerde kullanılmaya başlandı. Topoloji, Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann, Henri Poincaré gibi ünlü matematikçilerin çalışmalarıyla gelişti ve matematiğin önemli dallarından biri haline geldi.

Nokta-küme topolojisi olarak da adlandırılan **genel topoloji**, cebirsel, diferansiyel, geometrik dahil olmak üzere diğer tüm topoloji dallarının temelini oluşturmaktadır. Bu anlamda topolojik uzay kavramı zaman içerisinde birçok matematikçi tarafından çalışılarak genişletilmiştir. Genel topoloji kavramında yer alan sonlu kesişimler altında kapalı olma özelliğini bulundurmayan uzayı 80'lerde Mashhour ve ark. **supra topolojik uzay** olarak tanımlamıştır. Yine topoloji aksiyomlarından biri olan keyfi birleşim altında kapalılık özelliğini sağlamayan ve **infra topoloji** adı verilen tanım Adel M. Al odhari tarafından verilmiştir. Bu yeni yapılar çok sayıda araştırmacı tarafından desteklenmiştir. Takip eden yıllarda topolojik uzaylar üzerinde kapsamlı araştırmalar yapıldı ve genelleştirmeler verildi. Son yirmi yılda ise **klasik küme** yerine **bulanık (fuzzy) küme, esnek (soft) küme ve bulanık esnek (bulanık esnek) küme** alınarak topolojik uzaylarda klasik topolojinin yerini **bulanık (fuzzy) topoloji, esnek (soft) topoloji ve bulanık esnek (fuzzy soft) topoloji** almış olup topolojik uzaylar farklı bir alana taşınarak çalışmalar çok yönlü hale gelmiş ve gelişmiştir. Ayrıca bulanık topolojinin supra bulanık topolojiye genelleştirildiği ve buna benzer birçok güncel çalışma da mevcuttur. Bu özel topolojik uzaylardan bazılarına 3. Bölümde ayrıntılı olarak değinilecektir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
ÇEŞİTLİ TOPOLOJİK UZAYLAR

Nokta küme topolojisi alanında tanımlanan topoloji ve topolojik uzay kavramları, bu kavramlarda yer alan X kümesinin klasik kümeden farklı olarak fuzzy (bulanık) küme, soft (esnek), fuzzy-soft veya benzeri küme tipleri olarak alınarak genelleştirilebilir. Böylece çeşitli topolojik uzaylar elde edilerek klasik topolojik uzaylar üzerinde yapılan çalışmalar ve topolojik kavramlar bu uzaylara taşınarak araştırılabilir. Günümüzde matematikçilerin topoloji alanındaki bu tür çalışmalarıyla sıklıkla karşılaşmaktayız.

Bazı durumlarda ise klasik X kümesi üzerinde topoloji aksiyomları daha zayıf veya daha güçlü koşullar olarak değiştirilerek çeşitli uzaylar elde edilmektedir. Son zamanlarda ise hem klasik X kümesi ve hem de topoloji aksiyomları değiştirilerek farklı topolojik uzaylar üzerinde araştırmalar yapılmaktadır. Üstelik bu yeni topolojik uzayların özellikle karar verme mekanizması ve daha birçok alanda uygulamaları mevcuttur.

Bu bölümde yukarıda bahsedilen yollarla elde edilmiş çeşitli topolojik uzayların bir kısmından bahsedilecektir. Ancak literatürde daha çeşitli topolojik uzaylara ulaşıla bilinir.

3.1.TOPOLOJİ VE TOPOLOJİK UZAY TANIMI

Bu kesimde topoloji ve topolojik uzay tanımları verilerek örneklendirilecek ve bazı temel topolojik kavramlardan bahsedilecektir. Topolojiyi oluşturan yapı taşları olan açık kümeler ve açık kümelere bağlı olarak kapalı kümeleri vererek işe başlayacağız. Oldukça yeni sayılabilecek topoloji kavramı bugünkü tanımına ulaşana kadar bazı değişimler yaşamıştır. Hausdorff ve Frechet gibi matematikçilerin 20. yüzyılın başlarında verdiği tanımlar zamanla gelişerek aşağıda verilecek olan halini almıştır. Topolojinin bu şekildeki aksiyomatik ifadesi ilk olarak Felix Hausdorff'un 1914 yılındaki "Grundzuge der Mengenlehre" adlı kitabında yer almıştır.

Topoloji sözcüğü, özel anlamıyla, bir topolojik uzayı tanımlamak için inşa edilen ve belli koşulları sağlayan kümeler ailesi için kullanılmaktadır. Aşağıdaki matematiksel tanımda bu koşullar sıralanmıştır. Topolojik yapı, geometri bağlamında bir kümenin üzerine konabilecek en basit yapı olarak görülebilir. Başka bir deyişle, topoloji, geometri yapmak için atılan ilk adımdır. Bir fonksiyonlar kümesi, bir kümeler sınıfı, bir eğriler ailesi veya bir yüzey, bir eğri uygun birer (altkümeleri) aile(si) ile topolojik uzay olarak düşünülebilirler.

Özel anlamıyla bir topoloji, aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

Topoloji dalının temel uğraş konusu olan **topolojik uzaylar**, boş kümeden farklı bir X kümesi ile onun aşağıdaki varsayımları sağlayan alt kümelerinin **topoloji** adı verilen bir τ ailesinden oluşur:

I. $\emptyset, X \in \tau$
II. τ sonlu arakesit altında kapalıdır
III. τ keyfi birleşim altında kapalıdır

Bu durumda τ ya X üzerinde bir **topoloji** ve (X, τ) ikilisine de bir **topolojik uzay** denir. Ayrıca τ ailesinin öğelerine de X kümesinin τ topolojisine göre **açık alt kümeleri** denir. Tümleyeni açık olan kümelere de X kümesinin τ topolojisine göre **kapalı alt kümeleri** denir.

(X, τ) bir topolojik uzay ve K^c, K kümesinin tümleyeni olmak üzere $\mathcal{K} = \{K : K^c \in \tau\}$ ailesine τ topolojisinin **kapalı kümeler ailesi** denir ve aşağıdaki koşulları sağlar:

I. $\emptyset, X \in \mathcal{K}$
II. $\mathcal{K}$ keyfi arakesit altında kapalıdır
III. $\mathcal{K}$ sonlu birleşim altında kapalıdır

Bir $X \neq \emptyset$ kümesi için bazı özel topolojiler aşağıdaki gibi sıralanmıştır:

i. $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$ ayrık olmayan topoloji
ii. $\tau_1 = 2^X$ [X in kuvvet kümesi] ayrık topoloji

iii. $\tau_A = \{A \cap T: T \in \tau\}$ ailesi A kümesi üzerinde bir topoloji olup, **A üzerinde üretilen alt uzay topolojisi** adını alır.

Yukarıda verilen özel topolojilerle oluşturulan (X, τ_0) ve $(X, 2^X)$ ikililerine sırasıyla **ayrık olmayan topolojik uzay** ve **ayrık topolojik uzay** denir. $(\mathrm{A}, \tau_{\mathrm{A}})$ ikilisine de (X, τ) topolojik uzayının **alt uzayı** adı verilir.

τ ve τ', $X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde iki topoloji olmak üzere;

i. Eğer $\tau \subseteq \tau'$ ise τ ya τ' den daha **kaba** topoloji veya τ' ye τdan daha **ince** topoloji adı verilir. Buna göre,

ii. τ_1 **en ince topoloji** τ_0 ise **en kaba topoloji** olmaktadır.

Şimdi aşağıda bazı özel topolojiler tanımlayacağız:

1. X bir sonsuz küme olsun. $\{U \subseteq X: U^c = X \backslash U$ sonludur$\} \cup \{\emptyset\}$ ailesi bir topolojidir. Bu aile τ_{tso} ile gösterilecektir. Bu topolojiye X ' in sonlu tümleyenler topolojisi veya Zariski topolojisi denir.

2. X bir sonsuz küme olsun.

$$\{U \subseteq X: U^c = X \backslash U \text{ sayılabilirdir}\} \cup \{\emptyset\}$$

ailesi bir topolojidir. Bu topolojiye X' in sayılabilir tümleyenler topolojisi adı verilir ve τ_{tsa} sembolü ile gösterilir.

3. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinde $\tau_{\text{sağ}} = \{\emptyset \cup \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty): a \in \mathbb{R}\}$ ve $\tau_{\mathrm{sol}} = \{\emptyset \cup \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a): a \in \mathbb{R}\}$ aileleri birer topolojidir.

Buradan bir X kümesi üzerinde aynı anda birden çok topoloji tanımlanabileceği aşikardır. Bu nedenle bir topolojik uzayın açık kümelerinden söz ederken gerekli ise **τ-açık** terimi kullanılır.

Bazı topolojik uzay örnekleri verilerek topolojik uzay kavramı pekiştirilecektir.

Örnek 1:

Bir $X = \{a, b, c\}$ kümesini düşünelim.

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$$

$$\eta = \big\{\emptyset, X, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\big\}$$

$$\sigma = \big\{\emptyset, X, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}\big\}$$

aileleri birer topolojidir. Üç elemanlı kümeler üzerinde daha birçok topoloji yazılabileceği gibi dört ve daha fazla elemanlı kümeler için de topolojiler yazılabilir.

Bazı topolojik kavramları kısaca özetleyelim:

(X, τ) bir topolojik uzay, $A, T, K \subseteq X$ olsun.

Topolojik uzaylarda önemli bir yeri olan özel alt kümelerden biri de **komşuluklardır**. $x \in T \subseteq A$ olacak şekilde $T \in \tau$ varsa A kümesine x noktasının bir komşuluğu denir ve x in bütün komşuluklarının ailesi de $\eta(x)$ ile gösterilir.

Eğer $x \in A$ elemanının uygun bir komşuluğu A nın içinde kalıyorsa bu x noktasına A nın bir **iç noktası** denir. A'nın tüm iç noktalarının kümesine A nın **içi** denilir ve A^o ile gösterilir. Böylece $A^o = \{x \in A \colon \exists N \in \eta(x) \colon N \subseteq A\}$ olur. Ayrıca A^o kümesi A kümesinin alt kümesi olan en büyük açık kümedir. Yani G açık bir küme olmak üzere $A^o = \bigcup_{G \subseteq A} G$ olur.

A kümesini kapsayan tüm kapalı kümelerin arakesitine A kümesinin **kapanışı** denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir. Buna göre $\bar{A}$ kümesi A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümedir. K kapalı bir küme olmak üzere $\bar{A} = \bigcap_{A \subseteq K} K$ yazılışından $\bar{A}$ kapalı ve her $A \subseteq K$ kapalı kümesi için $\bar{A} \subseteq K$ olmaktadır.

Topolojik uzaylarda önemli bir alt başlık ise **tabandır.** (X, τ) bir topolojik uzay, $\mathcal{B} \subseteq \tau$ bir alt aile olsun. Eğer X' in her açık kümesi $\mathcal{B}$' nin bir takım elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa, $\mathcal{B}$ ailesine **τ topolojisinin bir tabanı** denir.

Boş olmayan bir X kümesi için 2^X topolojisini düşünelim. X'in tek nokta kümelerinden oluşan $\mathcal{B} = \big\{\{p\} \colon p \in X\big\}$ ailesi 2^X topolojisinin, yani X üzerindeki ayrık topolojinin bir tabanıdır. Çünkü bir $A \in 2^X$ için

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}, \{a\} \in \mathcal{B}$$

her zaman yazılabilir. Diğer yandan bu $\mathcal{B}$ ailesini kapsayan her aile de 2^X için bir tabandır, yani $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ ise $\mathcal{B}'$ ailesi $\mathcal{B}' \subseteq 2^X$ koşulu ile bir tabandır.

Diğer yandan X üzerinde ayrık olmayan τ_0 topolojisini düşünelim. $\mathcal{B} = \{X\} \subseteq \tau_0$ alt ailesi τ_0 için bir tabandır.

Gerçel sayılar kümesinin açık aralıkların birleşimi şeklinde yazılabilen alt kümlerinden oluşan aile $\mathbb{R}$ üzerinde bir topolojidir. $\mathbb{R}$'nin adi topoloji olarak adlandırılan ve $\mathcal{U}$ ile gösterilen bu topoloji ile birlikte $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ topolojik uzayını düşünelim.

$$\mathcal{B} = \{(a, b): a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{U}$$

ailesi $\mathcal{U}$ topolojisi için bir tabandır.

Peki verilen bir ailenin verilen bir topolojinin taban olup olmadığını nasıl anlayabiliriz. Bunun için aşağıdaki gerek ve yeter koşulu verelim.

"$\mathcal{B} \subseteq \tau$ ailesinin τ topolojisi için bir taban olması için gerek ve yeterli koşul her $G \in \tau$ ve her $x \in G$ için $x \in B_x \subseteq G$ olacak şekilde en az bir $B_x \in \mathcal{B}$ bulunabilmesidir".

Ayrıca;

Eğer $\mathcal{B}$, τ için bir taban ise o zaman

"her $B_i, B_j \in \mathcal{B}$ ve her $x \in B_i \cap B_j$ için $x \in B_{ij} \subseteq B_i \cap B_j$ olacak şekilde bir $B_{ij} \in \mathcal{B}$"

bulunabilir.

Diyelim ki elinizde boştan farklı bir X kümesi ve onun alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{B}$ ailesi var ancak X kümesi üzerinde herhangi bir topoloji verilmemiş. Taban olarak verilen bu $\mathcal{B}$ ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji üretir mi? Yani $\mathcal{B}$ bir topoloji için taban olur mu ve oluyorsa bu tabanın ürettiği topoloji nedir?

"Eğer $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ sayılabilir alt ailesi için,

a) $X = \bigcup \mathcal{B}'$,
b) Her $B_i, B_j \in \mathcal{B}$ ve her $B_i \cap B_j$ için

$$p \in B_{ij} \subseteq B_i \cap B_j$$

olacak şekilde bir $B_{ij} \in \mathcal{B}$ vardır."

koşulları sağlanıyorsa $\mathcal{B}$, X üzerinde bir topoloji için taban olur ve I sayılabilir bir indis kümesi olmak üzere,

$$\tau = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i : I \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

ailesi X' de bir topolojidir ve $\mathcal{B}$ ailesi bu topolojinin bir tabanıdır. Bu τ topolojisine $\mathcal{B}$ tabanının ürettiği topoloji denir.

Örnek 2:

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinde $\mathcal{B} = \{[x, r) : x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q}\}$ ailesi yukarıda verilen taban olmanın gerekli koşulları olan (a) ve (b) koşullarını sağlar. Bu ailenin taban olduğu topolojiye *Zorgenfrey* ***topolojisi*** denir ve τ_Z ile gösterilir. $(\mathbb{R}, \tau_Z)$ uzayına *Zorgenfrey* ***doğrusu*** denilmektedir. Böylece,

$$\tau_Z = \left\{ \bigcup_{i \in I} [x_i, r_i) : x_i \in \mathbb{R}, r_i \in \mathbb{Q}, I \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

olacaktır.

Örnek 3:

X sonsuz bir küme, $p \in X$ onun bir noktası ve $A \subseteq X$ olsun. X üzerindeki τ topolojisini şöyle tanımlayalım:

$$\tau = \{G \subseteq X : p \notin G \text{ veya } G^c \text{ sonlu}\}$$

Bu durumda,

$$\mathcal{B} = \Big\{\{x\} \subseteq X : x \neq p\Big\} \cup \{X \backslash F : F \subseteq X \text{ sonlu}\}$$

ailesi τ topolojisi için bir tabandır.

Ayrıca bu topolojik uzayda,

(a) $\{p\}$ kapalı kümedir,

(b) $x \neq p$ için $\{x\}$ açık ve kapalı kümedir,

(c) A sonlu ise $A = \bar{A}$, A sonsuz ise $\bar{A} = A \cup \{p\}$ olur,

(d) A^c sonlu ise $A^0 = A$; A^c sonsuz ise $A^0 = A \cup \{p\}$ olur,

(e) Her sonsuz öğeli ve kapalı A, B kümeleri için $A \cap B \neq \emptyset$ olur,

özellikleri sağlanır.

3.2. İNFRA TOPOLOJİK UZAY

İnfra topolojik uzaylar, keyfi birleşim altında kapalı olma durumunu gevşeten topolojik uzayların bir genellemesidir. Uzayın bir takım alt kümelerinden oluşan ailenin keyfi birleşimler altında kapalı olma varsayımından vazgeçerek topoloji kavramını genişleten bir aile olarak tanımlanırlar. Buna göre infra topolojik uzay boş kümeden farklı bir X kümesi ile onun aşağıdaki varsayımları sağlayan alt kümelerinin infra topoloji adı verilen bir τ_i ailesinden oluşur:

I. $\emptyset, X \in \tau_i$
II. τ_i sonlu arakesit altında kapalıdır

Bu durumda τ_i ye X üzerinde bir infra topoloji ve (X, τ_i) ikilisine de infra topolojik uzay denir. Ayrıca τ_i ailesinin öğelerine de X kümesinin infra açıkları denir. Tümleyeni infra açık olan kümelere de X kümesinin infra kapalı alt kümeleri denir.

Aşağıda infra topolojik uzay olup topolojik uzay olmayan örnekler verilmiştir.

1. $X = \{a, b, c\}, \tau_i = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}\}$ için $\{a\} \cup \{c\} = \{a, c\} \notin \tau_i$ olduğundan τ_i ailesi X uzayı üzerinde bir topoloji değildir ancak (X, τ_i) bir infra topolojik uzaydır.

2. $X = \{a,b,c,d\}, \tau_i = \big\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,d\}\big\}$ için (X,τ_i) bir infra topolojik uzaydır ve $\{a,b\} \cup \{a,d\} = \{a,b,d\} \notin \tau_i$ olduğundan τ_i ailesi X uzayı üzerinde bir topoloji değildir.
3. $X = \{a,b,c,d\}, \tau_i = \big\{\emptyset, X, \{b\}, \{d\}, \{b,d\}, \{a,d\}\big\}$ için (X,τ_i) bir infra topolojik uzaydır.
4. $X = \{a,b,c,d\}, \tau_i = \big\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{b,d\}, \{a,b,d\}\big\}$ için (X,τ_i) bir infra topolojik uzaydır. $\{b\} \cup \{d\} = \{b,d\} \in \tau_i$ ve $\{a\} \cup \{b,d\} = \{a,b,d\} \in \tau_i$ ancak $\{a\} \cup \{d\} = \{a,d\} \notin \tau_i$ olduğundan τ_i ailesi X uzayı üzerinde bir topoloji değildir.
5. $X = \{a,b,c,d\}, \tau_i = \big\{\emptyset, X, \{d\}, \{b,d\}, \{a,d\}\big\}$ için (X,τ_i) bir infra topolojik uzaydır.
6. $\mathbb{N}$ (doğal sayılar kümesi) üzerinde
$$\tau_i = \{G \subset \mathbb{N}: G \text{ sonlu ve kard}(G) \leq \text{k}\} \cup \mathbb{N}$$
ile tanımlansın. Kardinalitesi k'ya eşit veya k'dan küçük olan kümelerin arakesitinin de kardinalitesi k'ya eşit veya k'dan küçük olacağından (X,τ_i) bir infra topolojik uzaydır. Ancak kardinalitesi k'ya eşit veya k'dan küçük olan kümelerin birleşiminin kardinalitesinin k'dan büyük olabileceğine dikkat ediniz.
7. $\mathbb{Z}$ (tam sayılar kümesi) üzerinde tanımlanan
$$\tau_i = \{\emptyset, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-\}$$
olsun. $\mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \emptyset \in \tau_i$ ancak $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}\backslash\{\emptyset\} \notin \tau_i$ olduğuna dikkat ediniz.
8. $X = [-1,1], \tau_i = \left\{\emptyset, X, \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right], \left[0, \frac{1}{4}\right], \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\}$ olarak seçilirse (X,τ_i) bir infra topolojik uzaydır.
9. $X = \mathbb{R}, \tau_i = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a], [b, \infty) \subseteq \mathbb{R}: a \leq 0, b \geq 0\}$ için $(\mathbb{R},\tau_i)$ infra topolojik uzaydır ve $\{0\}$ tek nokta kümesi infra açıktır. Ancak yukarıda tanımlanan τ_i ailesinde a, b reel sayılarının seçimi $a < 0, b > 0$ olarak yapılırsa $(\mathbb{R},\tau_i)$ yine bir infra topolojik uzay olur ancak $\{0\}$ tek nokta kümesi infra açık olmaz.

Topolojik uzaylarda olduğu gibi bir kümenin içi o kümenin alt kümesi olan en büyük açık küme olmayabilir. Çünkü infra topolojik uzaylarda topolojik uzayların aksine infra açıkların birleşimi infra açık olmayabilir.

Örnek 4:

$X = \{a, b, c, d\}, \tau_i = \big\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}\big\}$ olarak alınsın. $A = \{a, b, c\} \subseteq X$ için A'nın infra içi

$$A^o = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_i$$

olur. Dolayısıyla A^o kümesi A'nın alt kümesi olan en büyük infra açık küme değildir.

3.3. SUPRA TOPOLOJİK UZAY

Supra-topolojik uzaylar, matematiksel topoloji alanında bir topolojik uzayın kavramını genişleten bir fikirdir. Bir supra-topolojik uzayda, geleneksel bir topolojik uzayda olduğundan daha fazla açık küme bulunabilir. Özellikle, bir supra-topolojik uzayda açık kümeler, geleneksel topolojideki gibi sonlu kesişimleri kapsama gibi bazı aksiyomları sağlamayabilir.

Supra-topolojik uzay kavramı, genelleştirilmiş topolojik yapılar bağlamında ortaya çıkar, burada araştırmacılar geleneksel topoloji aksiyomlarını bazı durumlarda gevşeterek daha genel uzayları incelemeyi amaçlarlar. Bu uzaylar, matematikte ve teorik bilgisayar biliminde bazı durumlarda geleneksel topolojik uzaylar çok sınırlayıcı olabileceğinden, belirli matematiksel sorunları incelemek için kullanışlı olabilir.

Supra-topolojik uzaylar daha esnek açık küme sistemleri ile daha geniş bir uzay araştırmasına izin verir, ancak bu, klasik topolojik uzaylara göre daha özelleşmiş ve daha az yaygın bir kavramdır. İncelenmeleri genellikle standart topolojik tanımlarla uyuşmayan farklı süreklilik ve yakınsama kavramlarını araştırmayı içerir.

1983 yılında Mashhour ve ark. topolojinin kesişim koşulunu ihmal ederek supra topolojik uzayları (STS'ler) tanıttı. Bu, supra topolojiyi (ST) bazı gerçek hayat problemlerini tanımlamak ve belirli topolojik kavramlar arasındaki ilişkileri gösteren bazı örnekleri kolayca oluşturmak için daha esnek hale getirir. Al-shami bir kümenin sınır noktaları, kompaktlık ve STS'lerdeki ayırma aksiyomları gibi klasik topolojik kavramları araştırdı.

Supra-topolojik uzaylar, topolojik uzayların genelleştirilmiş bir biçimidir. Bu uzaylarda açık küme kavramı gevşetilir ve daha geniş ve esnek bir çerçeve sunar. Supra-topolojik uzayların kesin tanımı, belirli bağlama ve araştırmacının tercihlerine bağlı olarak biraz değişebilir, ancak aşağıda yaygın bir genel tanımı bulunmaktadır:

X , boş olmayan bir küme olsun. Bu, supra-topolojinin tanımlandığı temel kümedir.

X 'in bazı alt kümelerinden oluşan $\mathcal{S}$ ailesi için, $\mathcal{S}$, aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa, X üzerinde bir **supra-topoloji** olarak kabul edilir:

I. $X, \emptyset \in \mathcal{S}$: Uzayın kendisi X ve boş küme $\emptyset$, $\mathcal{S}$ 'nin üyelerindendir. Bu, X ve boş kümenin bu supra-topolojide supra-açık kümeler olarak kabul edildiği anlamına gelir.

II. $\mathcal{S}$ 'nin üyelerinin keyfi birleşimi $\mathcal{S}$ içindedir: $\mathcal{S}$ 'den alınan herhangi bir keyfi birleşim, sonuç da $\mathcal{S}$ içinde olmalıdır. Bu, supra-topolojinin temel bir özelliğidir ve geleneksel topolojide bir topolojinin keyfi birleşim altında kapalı olmasıyla benzerdir.

Yukarıdaki aksiyomları karşılayan $\mathcal{S}$ ile $(X, \mathcal{S})$ ikilisine **bir supra-topolojik uzay** olarak adlandırılır**.** $\mathcal{S}$' nin üyelerine, **supra-açık kümeler** denir. Bu kümeler, bu supra-topolojide geleneksel topolojideki açık kümelerin rolünü oynarlar.

$(X, \mathcal{S})$ supra topolojik uzayında tümleyeni supra açık olan X'in bir alt kümesi bu uzayın **supra-kapalı** bir kümesi olarak adlandırılır. Tüm supra-kapalı kümelerin bir ailesi $\mathcal{S}$ 'nin elemanlarının tümleyenlerini içerir ve $\mathcal{S}^c$ ile gösterilir.

Aşağıda supra topolojik uzay olup topolojik uzay olmayan örnekler verilmiştir.

1. $X = \{a, b, c\}, \tau_i = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ olsun. τ_i ailesine bakıldığında $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\} \notin \tau_i$ olduğundan τ_i ailesi X uzayı üzerinde bir topoloji değildir ancak (X, τ_i) bir supra topolojik uzaydır.
2. $X = \{a, b, c, d\}, \tau_i = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ olsun. (X, τ_i) bir supra topolojik uzaydır. Diğer taraftan τ_i tanımından, $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \tau_i$ olduğundan τ_i ailesi X uzayı üzerinde bir topoloji değildir.
3. $X = \{a, b, c, d\}, \tau_i = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b, d\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}\}$ için (X, τ_i) bir supra topolojik uzaydır.
4. $\mathbb{Q}$ (rasyonel sayılar kümesi) üzerinde $\tau_i = \{\emptyset, G \subset \mathbb{Q}: 1 \in G\}$ ile tanımlanan aile $\mathbb{Q}$ üzerinde bir supra topolojidir.
5. $X = \mathbb{R}, \tau_i = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{G \subseteq \mathbb{R}: 1 \in G$ veya $2 \in G\}$ için $(\mathbb{R}, \tau_i)$ supra topolojik uzaydır.

3.4. ESNEK (SOFT) TOPOLOJİK UZAY

Klasik mantık anlayışıyla ifadesi mümkün olmayan birçok belirsizliğin evrenimizde var olması tarihte birçok matematikçiyi yeni matematiksel modellemeler ve araçlar kullanmaya zorlamıştır. Bilimdeki ilerlemeler her geçen gün birçok alanda kesinlik ilkesinin gereksiz kaldığı pek çok karmaşık problemi karşımıza çıkarmıştır. Bu tarz problemlere çözüm bulmak amacıyla ilk olarak 17. yüzyıl başlarında Pascal ve Fermat olasılık teorisini ortaya atmıştır. Bu amaçla ortaya atılan bir diğer önemli teori de 1965 yılında Zadeh tarafından tanıtılan bulanık kümeler teorisidir. Bulanık kümeler teorisi uzman sistemlerde, karar verme mekanizmalarında, modellemede, sosyal bilimlerde, tıbbi teşhislerde vb. gibi birçok farklı alanda kullanılmıştır. Daha sonra 1982 yılında Pawlack tarafından yaklaşımlı (Rough) küme teorisi, 1993 yılında Gau ve Buehhrer Vague tarafından vague kümeler ve 1994 yılında da Atavassov tarafından aralık matematiği teorileri tanıtılmıştır.

Bulanık kümeler teorisinde bir bulanık küme üyelik fonksiyonu yardımı ile tanımlanır. Üyelik fonksiyonunu çokça ferdi olduğundan genel bir yöntem inşa etmek zordur. Bulanık küme teorisinde parametrelendirme araçlarının yetersiz kalmasından kaynaklanan yapısal zorluğun üstesinden gelmek için 1999 yılında Molodtsov, esnek (soft) küme teorisinde parametre kümesini küme değerli bir fonksiyon seçerek bulanık küme teorisindeki belirsizliği ortadan kaldırmaya çalışmıştır. Bu yeni teorinin ilk pratik uygulaması Maji (2003) tarafından kullanılmıştır. Birçok araştırmacının dikkatini çeken esnek küme teorisi uygulamaları ile matematiğin diğer branşları arasındaki bağıntıları üzerine çalışmalar yapmıştır. Bu önemli çalışmalardan biri de Shabir ve Naz (2011) tarafından klasik topolojik uzaylar ile esnek topolojik uzaylar arasındaki ilişkinin incelenmesidir.

Başlangıç olarak esnek küme ve esnek topoloji tanımlarını vererek klasik topolojinin biraz dışına çıkalım. Sonrasında yine özel topolojik uzaylardan olan ve son zamanlarda matematikçilerin de yoğun ilgi gösterdiği bulanık küme-bulanık topoloji ve bulanık esnek küme-bulanık esnek topoloji tanımlarını vererek örneklendirelim.

Boştan farklı X evrensel küme, E parametre kümesi ve 2^X de X 'in kuvvet kümesi olsun. $F: E \longrightarrow 2^X$ bir dönüşüm olmak üzere (F, E) ikilisine X üzerinde bir **esnek küme** denir. Aynı zamanda X üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi $SS(X)_E$ ile ifade edilecektir. Buna göre $e \in E$ olmak üzere,

$A, B, C \subseteq X$ için $(F, E), (G, E), (H, E), (F, A), (G, B), (H, C) \in SS(X)_E$ olsun.

i. $A \subseteq B$ ve $\forall e \in A$ için $F(e) \subseteq G(e)$ oluyorsa $(F, A) \subseteq (G, B)$ olur.

ii. $(F, A) \subseteq (G, B)$ ve $(G, B) \subseteq (F, A)$ ise $(F, A) = (G, B)$ olur.

iii. $F^c: E \longrightarrow 2^X$, $F^c(e) = X - F(e)$ için $(F^c, E) = (F, E)^c$ esnek kümesi (F, E) esnek kümesinin **esnek tümleyenidir** ve açıktır ki $((F, E)^c)^c = (F, E)$ sağlanır.

iv. $\forall e \in E$ için $F(e) = \emptyset$ oluyorsa (F, E) ye **boş esnek küme** denir ve $\widetilde{\emptyset}$ sembolü ile gösterilir. Her $e \in E$ için $F(e) = X$ oluyorsa (F, E) ye **mutlak (evrensel) esnek küme** denir ve $\tilde{X}$ sembolü ile gösterilir. Açıktır ki $\tilde{X}^{\,c} = \widetilde{\emptyset}$ ve $\widetilde{\emptyset}^c = \tilde{X}$ olur.

v. $C = A \cup B$ olmak üzere (F, A) ile (G, B) esnek kümelerinin **esnek birleşimi** olan $(H, C) = (F, A) \,\widetilde{\cup}\, (G, B)$ esnek kümesi $e \in C$ olmak üzere

$$H(e) = \begin{cases} F(e), e \in A - B \\ G(e), e \in B - A \\ F(e) \cup G(e), e \in A \cap B \end{cases}$$

ile tanımlıdır.

vi. $C = A \cap B$ olmak üzere (F, A) ile (G, B) esnek kümelerinin **esnek kesişimi** olan $(H, C) = (F, A) \tilde{\cap} (G, B)$ esnek kümesi $e \in C$ olmak üzere $H(e) = F(e) \cap G(e)$ ile tanımlıdır.

Esnek kümeler için verilen bu özet tanıtımdan sonra esnek topoloji ve esnek topolojk uzay kavramlarını verebiliriz. Sabit E parametreler kümesi ile birlikte evrensel X kümesi üzerinde $\tilde{\tau}$ esnek kümelerin bir koleksiyonu olsun. $\tilde{\emptyset}, \tilde{X} \in \tilde{\tau}$ ailesi keyfi birleşim ve sonlu kesişim altında kapalı ise X üzerinde bir **esnek topoloji** adını alır ve $(X, \tilde{\tau}, E)$ ile gösterilen yapıya da **esnek topolojik uzay** adı verilir. Esnek topolojinin elemanlarına **esnek açık küme** ve tümleyeni esnek açık olan esnek kümeye **esnek kapalı küme** adı verilir.

Örneğin, X evrensel kümesinde üç cep telefonu olsun. $X = \{a, b\}$ ile ifade edilsin. $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesi cep telefonlarının ”pahalılık” ve ”renk” özelliklerini belirtsin.

$$F_1(e_1) = \{b\}, F_2(e_1) = \{a\}, F_1(e_2) = \{a\}, F_2(e_2) = \{b\}$$

olmak üzere $\tilde{\tau} = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E)\}$ X üzerinde bir esnek topolojidir.

3.5. BULANIK (FUZZY) TOPOLOJİK UZAY

Tamamen ikili değerlendirmeye dayanan bir matematiksel modelleme olan klasik mantıkta her değer için sadece iki durum vardır, 1 sembolünün verildiği ve doğru anlamına gelen ilk durum ile 0 sembolünün verildiği ve yanlış anlamına gelen ikinci durum. Ancak gerçek bundan daha geniştir ve yalnızca 0 ve 1 olmak üzere iki duruma bağlı olmayabilir. Bu nedenle, yaklaşık veya spesifik olmayan bilgileri temsil etme problemini çözmek için genel çerçeveyi sağlayan yeni bir mantığa ihtiyaç duyulmuştur. Bulanık mantık adı verilen bu mantık ilk olarak 1965 yılında İranlı bilim adamı Lutfi Zadeh, tarafından ortaya atılmıştır.

Bulanık mantık, sıcak, soğuk, ılık, az, çok, gibi deyimler ve belirsiz ifadeler aracılığıyla tümdengelim üzerine kuruludur. Çalışma boyunca, bulanık mantığın klasik mantığın bir genişlemesi olduğu sonucuna varılmıştır. Klasik mantık, üyelik derecesi {0,1} kümesi olduğunda, bulanık mantığın özel bir durumudur, Bulanık mantık sadece kümeler teorisinde değil, yapay zekada, gelişmiş elektronik cihazlarda, endüstriyel kontrolörlerde ve hatta günlük hayatımızda büyük öneme sahiptir.

Bulanık mantık, bulanık eseme ya da puslu mantık, 1965 yılında Lütfi Ali asker Zaide'nin yayınladığı bir makalenin sonucu oluşmuş bir mantık yapısıdır. Buna takiben Rescher (1969), Bellman (1970), Yager (1977), Dubois ve Prade (1980) bulanık mantığın gelişmesine katkıda bulunmuşlardır.

Bulanık mantık, klasik mantıktan daha geniş bir kavramdır. Klasik mantıkta değerler ya 1(öğe kümeye aittir) değerini ya da 0 değerini alır (öğe kümeye ait değildir).

Ancak bulanık (fuzzy) mantıkta her elemanın bir üyelik derecesi vardır. Üyelik derecesi [0,1] reel aralığında her hangi bir değer olabilir ve üyelik fonksiyonu F ile gösterilir.

Bulanık mantık sözel veya sayısal ifadeler içerir. Bu terimlere örnek olarak, kısa, uzun, sıcak, soğuk, ılık, yaşlı, genç, çok az, biraz, fazla, … gibi daha pek çok terim gösterilebilir.

Yani X evrensel küme ve $A \subseteq X$ olmak üzere bulanık küme teorisinde **üyelik fonksiyonu** $F_A(x): A \rightarrow [0,1]$ ile tanımlanır.

Her bir $x \in X$ elemanı, genellikle sıfır ile bir arasında olan ve bu elemanın kümeye ait olma (üyelik) derecesini temsil eden sayısal bir değere karışık gelir. Üyelik derecesi ne kadar büyükse, eleman daha çok kümeye aittir.

$x \in X$ elemanı hakkında, kümeye ait olma (üyelik) derecesi bire eşitse kümeye tam üye olduğu söylenir.

Bir $x \in X$ elemanının kümeye ait olma (üyelik) derecesi sıfır ise, bu elemenin kümede olmadığı anlamına gelir.

Buna göre, sıralı ikililerinin bir kümesi olarak gösterilen

$$F_A = \left\{ \big(x, F_A(x)\big) : x \in X \right\}$$

kümeye A kümesi üzerinde bir **bulanık küme** denir.

Bulanık kümeler kısaca F_A, G_B veya $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gibi semboller ile gösterilecektir. X kümesinin bütün bulanık alt kümelerinin ailesi ise I^X ile gösterilecektir.

Sabit bulanık küme,

$\forall x \in A$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ için $C = \left\{ \big(x, F_A(x)\big) : F_A(x) = \alpha, x \in A \right\}$

şeklinde tanımlanan bulanık kümedir ve kısaca F_α ile gösterilecektir.

Örnek 5:

$X = \{1,2,3,4,5,6\}$ evrensel küme ve $A = \{4,5,6\} \subseteq X$ verilsin. O zaman 6 elemanı A'ya tam üyedir ve 2 elemanı A'nın üyesi değildir. Bu durumda A kümesi bulanık küme olarak:

$F_A = \{(1,0), (2,0), (3,0), (4,1), (5,1), (6,1)\}$

ile ifade edilir.

Verilen bir bulanık kümenin her bir elemenınına ait üyelik derecesinin sıfır olması durumunda bu bulanık kümeye bulanık boş küme denir.

Bir $\boldsymbol{F_A}$ **bulanık kümesinin tümleyeni** $F_{A'}$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu $\forall\, x \in A$ için:

$F_{A'}(x) = 1 - F_A(x)$

şeklinde tanımlanır (Zadeh, 1965).

$\boldsymbol{F_A}$ **nın** $\boldsymbol{G_A}$ **da kapsanması** (veya denk oklarak , F_A nın G_A nın bir alt kümesi olması) için gerek ve yeter şart

$$\forall\, x \in A \text{ için, } F_A(x) \leq G_A(x)$$

olmasıdır . Bu durum sembollerle

$$F_A \subseteq G_A \Leftrightarrow F_A \leq G_A$$

şeklinde gösterilir.

Sırasıyla , $F_A(x)$ ve $G_B(x)$ üyelik fonksiyonlarına sahip olan $\boldsymbol{F_A}$ **ve** $\boldsymbol{G_B}$ **bulanık kümelerinin birleşimi** , $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cup B$ olmak üzere üyelik fonksiyonu

$$H_C(x) = \max\ \{F_A(x), G_B(x)\},\ x \in X$$

olarak tanımlanan bir H_C bulanık kümesidir ve kısaca

$$H_C = F_A \vee G_B$$

şeklinde yazılır.

F_A ve G_B nin birleşimi , hem F_A hem de G_B yi kapsayan en küçük bulanık kümedir.

Sırasıyla $F_A(x)$ ve $G_B(x)$ üyelik fonksiyonlarına sahip olan $\boldsymbol{F_A}$ **ve** $\boldsymbol{G_B}$ **bulanık kümesinin arakesiti** , üyelik fonksiyonu

$$H_C(x) = \min\{F_A(x), G_B(x)\},\ x \in X$$

ile bir H_C bulanık kümesidir ve kısaca

$$H_C = F_A \wedge G_B$$

olarak yazılır.

F_A ve G_B bulanık kümelerinin arakesiti F_A ile G_B' de kapsanan en büyük bulanık kümedir. Eğer $F_A \wedge G_B = \emptyset$ ise F_A ve G_B bulanık kümeleri **ayrıktır** denir .

Örnek 6:

$X = \{1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde

$F_A = \{(1,0.5),(2,1),(5,0.7)\}$ ve $G_B = \{(1,0.6),(4,1),(5,0.4)\}$

bulanık kümeleri verilsin. Buna göre,

$$F_A \vee G_B = \{(1,0.6),(2,1),(4,1),(5,0.7)\}$$

$$F_A \wedge G_B = \{(1,0.5),(5,0.4)\}$$

$$F_{A'} = \{(1,0.5),(2,0),(3,1),(4,1),(5,0.3)\}$$

$$G_{B'} = \{(1,0.4),(2,1),(3,1),(4,0),(5,0.6)\}$$

bulunur.

Uyarı: Kalsik kümelerde sağlanan

$F_A \wedge F_{A'} = \emptyset$ ve $F_A \vee F_{A'} = X$

özellikleri bulanık kümelerde sağlanmaz. Yani

$F_A \neq \emptyset$ için $F_A \wedge F_{A'} \neq \emptyset$ ve $F_A \vee F_{A'} \neq X$

dir. Gerçekten $F_A \neq \emptyset$ olduğundan $\exists x \in A$ için $F_A(x) \neq 0$ olur. Buradan $\exists x \in A$ için,

$$F_{A \cap A'}(x) = \min\{F_A(x), F_{A'}(x)\} = \min\{F_A(x), 1 - F_A(x)\} \neq 0$$

$$F_{A \cup A'}(x) = \max\{F_A(x), F_{A'}(x)\} = \max\{F_A(x), 1 - F_A(x)\} \neq 1$$

elde edilir.

Bulanık küme ve bulanık küme işlemlerinin ardından şimdi bulanık topoloji ve bulanık topolojik uzayları tanıtabiliriz.

X boştan farklı bir küme, $I = [0,1]$ kaplı aralığı ve

$$F_A = \{ \left(x, F_A(x)\right): x \in X \} \subseteq I^X$$

bulanık alt kümesi verilsin. $\forall x \in X$ için **bulanık boş küme ve bulanık evrensel küme** sırasıyla,

$$0_X: X \longrightarrow I, x \longrightarrow 0_x(x) = 0 \text{ ve } 1_X: X \longrightarrow I, x \longrightarrow 1_x(x) = 1$$

ile tanımlıdır.

$X \neq \emptyset$, $\tau \subseteq I^X$ ve $F_A, G_B \in I^X$ olarak verilsin.

i. $0_X, 1_X \in \tau$
ii. $F_A, G_B \in \tau \Longrightarrow F_A \wedge G_B \in \tau$
iii. $\forall i \in \mathbb{N}, F_{A_i} \in \tau \Longrightarrow \bigvee F_{A_i} \in \tau$

koşullarını sağlayan τ ailesine X üzerinde bir **bulanık topoloji** denir. Böylece (X, τ) ikilisine **bulanık topolojik uzay** ve τ ailesinin elemanlarına da **bulanık açık** küme denir. Tümleyeni bulanık açık olan kümeye ise **bulanık kapalı** küme denir.

Örnek 7:

X üzerinde herhangi bir F_A bulanık kümesi için $\tau = \{0_X, 1_X, F_A\}$ ailesi bir bulanık topolojidir ve (X, τ) bulanık topolojik uzayıdır.

Örnek 8:

$X = \{a, b, c\}$ evrensel kümesi üzerinde tanımlı bulanık kümeler

$\alpha = \{(a, 0.8), (b, 0.9), (c, 0.7)\}$,

$$\beta = \{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.4)\},$$

$$\gamma = \{(a, 0.3), (b, 0.3), (c, 0.2)\}$$

ile verilsin. Bu durumda $\tau = \{0_X, 1_X, \alpha, \beta, \gamma\}$ ailesi bulanık topoloji olur. Gerçekten,

$$\alpha \wedge \beta = \{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.4)\} = \beta \in \tau$$

$$\alpha \wedge \gamma = \{(a, 0.3), (b, 0.3), (c, 0.2)\} = \gamma \in \tau$$

$$\beta \wedge \gamma = \{(a, 0.3), (b, 0.3), (c, 0.2)\} = \gamma \in \tau$$

$$\alpha \vee \beta = \{(a, 0.8), (b, 0.9), (c, 0.7)\} = \alpha \in \tau$$

$$\alpha \vee \gamma = \{(a, 0.8), (b, 0.9), (c, 0.7)\} = \alpha \in \tau$$

$$\beta \vee \gamma = \{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.4)\} = \beta \in \tau$$

olur. Ayrıca,

$$\alpha \vee \beta \vee \gamma = \{(a, 0.8), (b, 0.9), (c, 0.7)\} = \alpha \in \tau$$

bulunur.

Bu nedenle, (X, τ) bulanık topolojik uzaydır.

Uyarı:

i. X ‘in sabit bulanık kümelerinden oluşan aile X’de bir bulanık topolojidir.

ii. X ‘de tanımlı bulanık topolojilerden oluşan ailenin her hangi arakesiti X üzerinde bir bulanık topolojidir ama birleşimi genel olarak bulanık topoloji olmaz.

Örnek 9:

$X = \{a, b, c, d, e\}$ olarak tanımlansın.

$F_A^1 = \{(a\,, 0.6)\,, (b\,, 0.2)\,, (c\,, 0.5)\,, (d\,, 1)\,, (e\,, 0)\}$

$F_A^2 = \{(a\,, 0)\,, (b\,, 0.3)\,, (c\,, 0.5)\,, (d\,, 0.7)\,, (e\,, 1)\}$

$F_A^3 = \{(a\,, 0.6)\,, (b\,, 0.3)\,, (c\,, 0.5)\,, (d\,, 1)\,, (e\,, 1)\}$

$F_A^4 = \{(a\,, 0)\,, (b\,, 0.2)\,, (c\,, 0.5)\,, (d\,, 0.7)\,, (e\,, 0)\}$

bulanık kümeleri için

$\tau = \{0_X, 1_X\,, F_A^1, F_A^2, F_A^3, F_A^4\}$

sınıfı bulanık topoloji olur. Ayrıca X in bulanık kapalı alt kümeleri:

$0_X\,, 1_X$

$(F_A^1)^c = \{(a\,, 0.4)\,, (b\,, 0.8)\,, (c\,, 0.5)\,, (d\,, 0)\,, (e\,, 1)\}$

$(F_A^2)^c = \{(a\,, 1)\,, (b\,, 0.7)\,, (c\,, 0.5)\,, (d\,, 0.3)\,, (e\,, 0)\}$

$(F_A^3)^c = \{(a\,, 0.4)\,, (b\,, 0.7)\,, (c\,, 0.5)\,, (d\,, 0)\,, (e\,, 0)\}$

$(F_A^4)^c = \{(a\,, 1)\,, (b\,, 0.8)\,, (c\,, 0.5)\,, (d\,, 0.3)\,, (e\,, 1)\}$

olarak bulunur. $G_A = \{(a\,, 0.5), (b\,, 0.4)\,, (c, 0.7), (d, 1), (e\,, 1)\}$ bulanık kümesi için G_A bulanık kümesinin sırasıyla **bulanık içi ve bulanık kapanışı**

$G_A{}^0 = F_A^2$ ve $\overline{G_A} = 1_X$

olarak bulunur.

3.6. BULANIK-ESNEK (FUZZY-SOFT) TOPOLOJİK UZAY

2001 yılında, Maji ve ark., bulanık küme ve esnek küme teorilerini birleştirerek bulanık esnek kümelerin tanımını verdi. Literatürde yapılan incelemeler, son dönem çalışmalarının önemli bir kısmının bulanık esnek topolojik uzaylar üzerinde olduğunu göstermektedir. Bulanık esnek kümeler üzerine yapılan araştırmaları sürdürmek amacıyla, Ahmad ve Kharal, bulanık esnek kümelerin daha fazla birçok özelliğini tanıttı ve bulanık esnek kümeler üzerinde bir eşleme kavramını sundu. 2011 yılında, Tanay ve ark., bulanık esnek kümelerin topolojik yapısını verdi. Ardından, 2012'de Varol ve Aygün, bulanık esnek topolojiyi ve Şimşekler ve Yüksel, 2013'te bulanık esnek Topolojik Uzayları tanıttı. Alcantud'un bulanık esnek kümeler üzerine yaptığı bir çalışmada ise esnek topoloji bulanık esnek topolojiyle ilişkilendiriyor. Bu makale, hem esnek topolojiyi hem de bulanık esnek topolojiyi, aralarındaki ilişkileri analiz ederek açıklar.

Bulanık esnek küme ve ardından bulanık esnek topolojik uzayları tanıtalım.

$X \neq \emptyset$ evrensel küme, $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ ve $E \neq \emptyset$, X evrensel kümesi üzerindeki olası tüm parametrelerin kümesi olsun.

$A \subseteq E$, $F(x): X \longrightarrow I$ üyelik fonksiyonu olmak üzere (X, E) üzerindeki bir **bulanık esnek $\boldsymbol{f_A}$ kümesi** $f: A \longrightarrow I^X$ dönüşümü ile aşağıdaki gibi tanımlanır. $f(e) = {F_f}^e$ olmak üzere,

$$f(e) = \begin{cases} {F_f}^e = \bar{0}, e \in E - A \\ {F_f}^e \neq \bar{0}, \quad\quad e \in A \end{cases}, \ \forall x \in X \text{ için } \bar{0}(x) = 0$$

$\boldsymbol{f_A}$ bulanık esnek kümesinin tümleyeni $\boldsymbol{{f_A}^c}$ ise (X, E) üzerinde aşağıda tanımı verilen bir bulanık esnek kümedir. $f^c: A \longrightarrow I^X$ için,

$$f(e) = \begin{cases} {F_{f^c}}^e = \bar{1}, \quad\quad e \in E - A \\ {F_{f^c}}^e = \bar{1} - {F_f}^e, \quad e \in A \end{cases}, \ \forall x \in X \text{ için } \bar{1}(x) = 1$$

$\boldsymbol{f_A}$ bulanık esnek kümesi $\forall e \in E$ için, $f_A(e) = 0$ oluyorsa bulanık esnek boş küme ve $f_A(e) = 1$ oluyorsa bulanık esnek evrensel küme adını alır ve sırasıyla $\tilde{0}_E$, $\tilde{1}_E$ ile gösterilir. Açıktır ki $\left(\tilde{0}_E\right)^c = \tilde{1}_E$ ve $\left(\tilde{1}_E\right)^c = \tilde{0}_E$ olur.

X üzerindeki tüm bulanık esnek kümelerin ailesini $\mathcal{F}(X, E)$ ile gösterelim. $A \subseteq B \subseteq X$ ve $f_A, g_B \in \mathcal{F}(X, E)$ olsun. Eğer her $e \in E$ için $f_A(e) \leq g_B(e)$ oluyorsa $\boldsymbol{g_B}$, $\boldsymbol{f_A}$**'nın bulanık esnek alt kümesidir** (veya f_A, g_B'nin bulanık esnek üst kümesidir) denir ve $f_A \sqsubseteq g_B$ ile gösterilir. Eğer $f_A \sqsubseteq g_B$ ve $g_B \sqsubseteq f_A$ oluyorsa $\boldsymbol{f_A}$ **ile** $\boldsymbol{g_B}$ **eşittir** denir ve $f_A = g_B$ ile gösterilir.

$f_A, g_B, h_C \in \mathcal{F}(X, E)$ olsun. f_A ile g_B **bulanık esnek kümelerinin birleşimi** h_C olmak üzere $h_C = f_A \sqcup g_B$ birleşimine ait üyelik fonksiyonu $\forall x \in X$ için, $h_C(x) = \max\{f_A(e), g_B(e)\}$ ile belirlenir.

$f_A, g_B, h_C \in \mathcal{F}(X, E)$ olsun. f_A ile g_B **bulanık esnek kümelerinin kesişimi** h_C olmak üzere $h_C = f_A \sqcap g_B$ birleşimine ait üyelik fonksiyonu $\forall x \in X$ için, $h_C(x) = \min\{f_A(e), g_B(e)\}$ ile belirlenir.

X kümesi üzerindeki bulanık esnek kümelerin bir ailesi $\tilde{\tau}$ olsun. Eğer $\tilde{0}_E, \tilde{1}_E \in \tilde{\tau}$ ailesi sonlu arakesit ve keyfi birleşim altında kapalı oluyorsa $\boldsymbol{\tilde{\tau}}$ **ya bir bulanık esnek topoloji ve** $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tilde{\tau}})$ **ya bulanık esnek topolojik uzay** denir. $\tilde{\tau}$ ailesinin her bir üyesine X'in $\tilde{\tau}$ ya göre **bulanık esnek açık alt kümesi** ve tümleyeni bulanık esnek açık olan kümeye de X'in $\tilde{\tau}$ ya göre **bulanık esnek kapalı kümesi** denir.

Örnek 10: $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $X = \{a, b, c, d, e\}$ olsun.

$A = \{p_1, p_2, p_3\} \subseteq P$ için,

$(f_{1_A}, P) = \{(p_1, \{a_{0.3}, b_{0.4}, c_{0.5}, d_{0.6}, e_{0.7}\}), (p_2, \{a_{0.8}, b_{0.5}, c_{0.9}, d_{0.5}, e_1\}), (p_3, \{a_{0.6}, b_{0.7}, c_{0.4}, d_{0.5}, e_{0.8}\})\}$

$(f_{2_A}, P) = \{(p_1, \{a_{0.3}, b_{0.3}, c_{0.2}, d_{0.5}, e_{0.6}\}), (p_2, \{a_{0.8}, b_{0.3}, c_{0.7}, d_{0.4}, e_{0.8}\}), (p_3, \{a_{0.4}, b_{0.7}, c_{0.2}, d_{0.2}, e_{0.6}\})\}$,

$(f_{3_A}, P) = \{(p_1, \{a_{0.2}, b_{0.3}, c_{0.1}, d_{0.3}, e_{0.5}\}), (p_2, \{a_{0.7}, b_{0.3}, c_{0.7}, d_{0.3}, e_{0.8}\}), (p_3, \{a_{0.4}, b_{0.6}, c_{0.1}, d_{0.2}, e_{0.6}\})\}$,

$(f_{4_A}, P) = \{(p_1, \{a_{0.3}, b_{0.4}, c_{0.2}, d_{0.5}, e_{0.6}\}), (p_2, \{a_{0.8}, b_{0.4}, c_{0.8}, d_{0.4}, e_{0.9}\}), (p_3, \{a_{0.5}, b_{0.7}, c_{0.2}, d_{0.3}, e_{0.8}\})\}$,

$(f_{5_A}, P) = \{(p_1, \{a_{0.1}, b_{0.2}, c_0, d_{0.2}, e_{0.4}\}), (p_2, \{a_{0.5}, b_{0.1}, c_{0.4}, d_{0.1}, e_0\}), (p_3, \{a_{0.2}, b_{0.4}, c_{0.1}, d_{0.1}, e_{0.4}\})\}$,

ile verilen bulanık esnek kümeler ile

$$\tilde{\tau} = \{\widetilde{\emptyset}, (f_A, P), (f_{1_A}, P), (f_{2_A}, P), (f_{3_A}, P), (f_{4_A}, P), (f_{5_A}, P)\}$$

ailesi (f_A, P) üzerinde bir bulanık esnek topolojidir ve $\widetilde{\emptyset}$, $(f_A, P), (f_{1_A}, P)$, $(f_{2_A}, P), (f_{3_A}, P), (f_{4_A}, P), (f_{5_A}, P)$ bulanık esnek kümeleri (f_A, P) uzayının bulanık esnek açık kümeleridir. Tümleyen yardımı ile (f_A, P) uzayının bulanık esnek kapalı kümeleri,

$({f_{1_A}}^c, P) = \{(p_1, \{a_{0.7}, b_{0.6}, c_{0.5}, d_{0.4}, e_{0.3}\}), (p_2, \{a_{0.2}, b_{0.5}, c_{0.1}, d_{0.5}, e_0\}), (p_3, \{a_{0.4}, b_{0.3}, c_{0.6}, d_{0.5}, e_{0.2}\})\}$

$({f_{2_A}}^c, P) = \{(p_1, \{a_{0.7}, b_{0.7}, c_{0.8}, d_{0.5}, e_{0.4}\}), (p_2, \{a_{0.2}, b_{0.7}, c_{0.3}, d_{0.6}, e_{0.2}\}), (p_3, \{a_{0.6}, b_{0.3}, c_{0.8}, d_{0.8}, e_{0.4}\})\}$,

$({f_{3_A}}^c, P) = \{(p_1, \{a_{0.8}, b_{0.7}, c_{0.9}, d_{0.7}, e_{0.5}\}), (p_2, \{a_{0.3}, b_{0.7}, c_{0.3}, d_{0.7}, e_{0.2}\}), (p_3, \{a_{0.6}, b_{0.4}, c_{0.9}, d_{0.8}, e_{0.4}\})\}$,

$({f_{4_A}}^c, P) = \{(p_1, \{a_{0.7}, b_{0.6}, c_{0.8}, d_{0.5}, e_{0.4}\}), (p_2, \{a_{0.2}, b_{0.6}, c_{0.2}, d_{0.6}, e_{0.1}\}), (p_3, \{a_{0.5}, b_{0.3}, c_{0.8}, d_{0.7}, e_{0.2}\})\}$,

$({f_{5_A}}^c, P) = \{(p_1, \{a_{0.9}, b_{0.8}, c_1, d_{0.8}, e_{0.6}\}), (p_2, \{a_{0.5}, b_{0.9}, c_{0.6}, d_{0.9}, e_1\}), (p_3, \{a_{0.8}, b_{0.6}, c_{0.9}, d_{0.9}, e_{0.6}\})\}$,

olarak bulunur.

SONSÖZ

Temel anlamıyla topoloji, geometrik cisimlerin biçim ve boyutlarından bağımsız olarak, bu cisimlerin nitelikleri ve ilişkileri üzerine odaklanan bir matematik dalıdır. Topoloji, matematiksel konuları kesinlikle tanımlamak yerine göreceli ve bağıl ilişkiler içinde ele alarak inceler. Bu, matematiksel bilgiyi soyut ve genel kavramlarla analiz etme yöntemidir. Topoloji matematiğin özgün bir alanıdır ve genellikle grafiklerle ilişkilendirilir. Aynı zamanda, modern geometrinin önemli bir bileşeni olarak kabul edilir.

Topoloji, çağdaş matematiğin en hızlı gelişen ve yaygınlaşan alanlarından biri olarak kabul edilir. En genel anlamda, topoloji "esnek madde geometrisi" olarak tanımlanabilir ve sadece noktaların kümesini değil, aynı zamanda esnek bir madde olarak düşünülen nesneleri deforme ederek birbirlerine dönüştürmeyi ele alır. Bu dönüşümler, yırtma veya kesme işlemi olmadan gerçekleşir ve nesnelerin eğilip bükülmesi, sıkıştırılması veya genişletilmesi gibi işlemlerle ifade edilebilir. Bu tür dönüşümleri bir fonksiyon olarak düşünürüz ve buna "homeomorfizm" adı verilir. Örneğin, bir karenin bir daireye, bir küpün bir piramide veya bir torusun bir kahve fincanına homeomorfik olması gibi dönüşümleri ele alır.

Topoloji, köşeli olmayan şekillerin geometrisi olarak da tanımlanabilir ve uzaydaki şekillerle de ilgilidir. Diğer geometri dalları katı formlarla ilgilenirken, topoloji esneyebilen formlarla uğraşır. Geometride iki form, biri diğerine yer değiştirmeden dönüştürülebiliyorsa eşit kabul edilir. Ancak topolojide, bir şamandıra ve bir fincan gibi iki nesne topolojik olarak eşdeğer kabul edilir. Bu, birinin kauçuktan yapıldığını ve diğerinin kopmadan veya yırtılmadan sürekli bir dönüşümle elde edilebileceğini varsayarsak geçerlidir. Bu tür nesneler "homeomorf" veya "eş yapılı" olarak kabul edilen iki şekildir.

20. yüzyılın başlarında, Poincaré tarafından "homotopi" olarak adlandırılan bir matematiksel nesnenin topolojik özelliklerini belirlemek için formüller geliştirilmiştir. Özellikle, iki matematiksel formdan birinin diğerine dönüşebilmesi durumunda bu formlara

"homotopik formlar" denir. Topoloji, şekillerin boyut veya biçim özelliklerine değil, şekillerin deformasyonları sırasında korunan özelliklere odaklanır. Bu kavramı daha iyi anlamak için "esnek bir yüzey" (lastik bir sayfa) örneği verilebilir. Bu bağlamda, bir geometrik nesnenin bulunduğu yüzey, elastik bir sayfa gibi düşünülür. Bu sayfayı katlamadan veya yırtmadan istediğiniz kadar uzatmak, bükmek veya gevşetmek mümkündür. Bu işlem sırasında geometrik nesne, bir diğerinin topolojik olarak dönüştürülmüş halini alır.

Topolojik dönüşümler, bir şeklin noktalarının başka bir şeklin noktalarıyla karşılıklı olarak değiştirilmesini ifade eder. Ancak bu dönüşümlerde metrik özellikler değil, metrik olmayan özellikler önemlidir. Bu nedenle şekiller değişebilir, ancak topolojik özellikleri korunur. Örneğin, bir karenin bir çember üzerine projeksiyonu veya tersine bir çemberin bir kare üzerine projeksiyonu, bu tür topolojik dönüşümlere örnek olabilir. Bu dönüşüm bijective (birebir) bir dönüşümdür ve uzunlukları korumaz. Şekil değişir, ancak noktalar arasındaki sıralama korunur. Ayrıca, basit kapalı bir eğri olma özelliği de korunur; örneğin, kare ve çember, kendilerini kesmeyen basit kapalı eğrilerdir. Tüm topolojik dönüşümlerde basit kapalı şekiller yine kapalı şekiller olarak kalır.

Topolojik dönüşümlerde üzerindeki noktaların sırası, yani lineer sıralama korunur. Bu durumu basit bir örnekle somutlaştıralım. Metro istasyonlarının çıkış kapılarını gösteren şemalar, yolcuları bilgilendirmek amacıyla kullanılır ve aslında tamamen topolojik bir yaklaşımla oluşturulur. Bu şemalar sadece istasyonların sıralamasını gösterir ve istasyonların arasındaki mesafe veya öncelik hakkında bilgi sağlar. Bu tür şemalar, yolcuların istasyonlar arasında dolaşırken sadece istasyonların sıralanışını anlamalarına yardımcı olur ve topolojinin temel ilkelerini kullanır. Bu şemada istasyonlar arasındaki mesafe, yönler ve diğer metrik bilgiler göz ardı edilmiştir. Bu nedenle, metro hattının yol haritası, tamamen topolojik bir dönüşümle sunulmuştur. Benzer bir şekilde, ring seferi yapan bir otobüs hattı örneği de düşünülebilir. Bu tür şemalar, kapalı şekiller üzerindeki noktaların sıralanışıyla ilgilidir ve metrik ayrıntılara odaklanmaz. Topolojik yaklaşım, nesnelerin dönüşümünü ve ilişkilerini vurgularken, ölçümler ve kesin mesafeler gibi metrik özellikleri ihmal eder.

Topolojinin iki farklı ve tamamlayıcı bakış açısı bulunmaktadır. Genel topoloji, süreklilik, sınır, kenar gibi kavramlardan sorumlu olup, özellikle noktaların komşuluklarını incelemeyi içerir. Bu genel topoloji kavramları, cebirsel yapılarla ifade edilebilir ve bu durumda cebirsel topolojiden bahsedilir.

Topolojinin anlaşılmasına yardımcı olmak için verilen tipik bir örnek, saplı bir kahve kupasının dış yüzeyi ile bir torusun (simit biçiminde bir şekil) dış yüzeyinin, bir açıdan bakıldığında aynı olduğunu gösterir. Eğer kahve kupası ıslak kil kullanılarak yapılmış olsaydı, sapına fazla dokunmadan geriye kalan kısmını eğip büküp ovalayarak kupanın tamamını bir torus formuna dönüştürebilirdik.

Topoloji açısından önemli olan, her iki yüzeyin de sadece bir delik içermesidir. (Tabii ki tüm çamuru bir topak haline getirip bu delikten çıkabilirsiniz, ancak bu sürekli bir dönüşüm olmadığı için topolojik bir işlem değildir.) Burada kupanın iç kısmının derinliği veya eğriliği topolojik olarak önem taşımaz.

Topolojik bakış açısı, insan algısını farklı bir şekilde ele almaktadır. İncelenen nesneler ve onların oluşturulma yöntemleri, sıradışı özelliklere sahip olabilir. Bu yöntemle oluşturulan Möbius Şeridi, iç ve dış yüzeyi aynı olan bir nesnedir. Başka bir örnek olarak ünlü Klein Şişesi, iki Möbius Şeridi'nin birleştirilmesiyle elde edilir; burada "iki Möbius Şeridi kenarlarından birleştirilebilir mi?" sorusu ortaya çıkar. Klein Şişesi, çizimde kendini keser gibi görünse de üç boyutlu uzayda gösterilmesi imkansızdır. Klein Şişesi, dört boyutlu içi dışı olmayan bir nesnedir. Bu karmaşık görünen durumu çözmek için dikkatli bir şekilde inceleme gerektirir.

Euclid geometrisi perspektifinden bakıldığında, nesnelerin döndürülmesi veya hareket ettirilmesi mümkün olsa da, biçimlerin uzatılması veya bükülmesi, o nesneyi farklı bir biçime dönüştürmeyi gerektirir.

Euclid geometrisi içinde, sert ve katı nesneler bile topolojik olarak esnek özelliklere sahip olabilirler. Örneğin, bir daire, bir kare veya bir üçgen, topolojik olarak eşdeğer kabul edilir. Bu, dairenin eğrisel yaylarını açarak köşeler ve kenarlar oluşturulabilir ve aynı şekilde bu köşelerin tekrar eğrisel hale getirilmesiyle dairenin elde edilebilir olduğu gerçeğiyle açıklanır. Bu süreç başta ve sonda birbiri ardına devam eden bir dizi adımı temsil eder. Bu nedenle, Euclid geometrisi içinde nesnelerin topolojik özellikleri dikkate alındığında, biçim değişiklikleri karmaşık gibi görünse de, aslında birbirine dönüşebilen esnek nesneler olarak kabul edilebilir.

Alman matematikçi Gauss (1777–1855), son çalışmalarında Dünya'nın şekil ve yapısına odaklanmıştır. Dört bin yıl boyunca Dünya'nın mükemmel bir küre olduğu kabul edilmiştir, ancak Isaac Newton (1643–1727), Dünya'nın yörüngesel hareketi gereği ekvator düzlemi boyunca bir çıkıntıya sahip olduğunu göstermiştir. Gauss ise Dünya'nın şeklini ölçme yolunu araştırırken, "Herhangi bir yüzeyin şekli, geometrinin normal kuralları ona hala uygulanabiliyorsa ölçülebilir" teoremine ulaşmıştır.

Yaklaşık 2000 yıl önce, Yunan matematikçi Euclid (M.Ö 365–275), bu kuralları belirlemiştir. Bunlardan biri, paralel doğruların uzunlukları ne olursa olsun hiçbir zaman kesişmeyeceği ilkesidir. Ancak Gauss, Euclid'in paralel doğruların aslında düz yüzeylerde kesişmeyeceği teoremini yüzeyin eğriliğini göz önünde bulundurarak açıkladığını fark etmiştir. Örneğin, top veya gezegen gibi eğri yüzeylerde Euclid'in kuralı geçerli değildir. Özellikle boylamların ekvatorda paralel başlayıp kutuplarda kesişmesi, bu durumu en açık şekilde gösterir.

Gauss'un bu yaklaşımı, Euclid dışı geometriye doğru ilerleyen bir adımdır. Bu nedenle, önceki çalışmalar, bir anlamda değerini kaybetmiştir. Örneğin, Euclid dışı yüzeylerde, üçgenin iç açılarının toplamının artık 180 derece olmadığı veya bir çemberin çevresinin, çapı ile Pi sayısının çarpımına eşit olmadığı ortaya çıkmıştır. Gauss, bu tür sonuçları içeren formülleri belirlemiştir. Bu bağlamda, haritacıların neden Dünya'nın mükemmel bir haritasını çizemediklerini açıklamıştır.

Bir kürenin yüzeyi gerçek bir eğriye sahiptir, bu nedenle bu doğal eğrileri anlamadan harita ayrıntıları belirlenemez. Öte yandan, bir silindirin eğrili yüzeyi mükemmel bir şekilde düzleştirilebilir.

Bu nedenle, dünya haritalarında çok farklı modeller denenir ve gerçekte Dünya'nın yüzeyi eğri olsa da, düz yüzeylerle temsil edilir. Bu temsil konusundaki sıkıntılar, Gauss'un gizlilik içinde yürüttüğü Euclid-dışı geometri çalışmalarını vurgular. Yıllar sonra farklı araştırmacılar benzer sonuçlara ulaşmış ve bunları açıklamışlardır. Bu bilim insanları arasında Albert Einstein da bulunur. Einstein, Genel İzafiyet Teorisi'ni geliştirirken Euclid dışı geometriyi merkezine yerleştirmiştir.

Einstein, araştırmalarında geometrik şekillerin ve üç boyutlu cisimlerin bazı durumlarda değişmeyen özelliklerini inceledi ve bu, "topoloji" adını verilen matematik dalına odaklandı. Einstein'a göre, topoloji eğilip bükülen cisimleri incelemekle ilgilidir. Gauss da bu alanın evreni anlama konusunda önemli bir yere sahip olduğunu düşünmüştür. Topoloji, bugün teorik fizikte temel bir rol oynamaktadır.

Evrendeki parçacıkların özellikleri ve aralarındaki güç ilişkileri, topolojinin yardımıyla açıklanır. Topolojik uzaylar, matematiğin topoloji dalının temel konularından biridir. Topolojik uzay, daha önce tanımlanan tüm uzaylardan daha genel bir yapıya sahiptir. Örneğin, metrik uzayda tanımlanan metrik yardımı ile uzayın açık kümeleri oluşturulabilir. Bu nedenle, reel eksen üzerinde açık aralıklar açık olarak kabul edilirse, bir topoloji tanımlanabilir ve bu, uzayın aşikar (Euclid) topolojisidir.

Topoloji, uzayın yapısını belirler ve fizikte kullanılan uzaylarda (Euclid uzayı, konfigürasyon uzayı, faz uzayı, Hilbert uzayı vb.) uzayın yapısını anlamak, sistemi açıklamak için önemlidir.

Araştırma boyunca gördük ki aslında **Topoloji** matematiğin yalnızca ölçüm ile ilgili bir alan olduğu algısını da ortadan kaldırmıştır. Çünkü matematiğin bir dalı olan topoloji ölçümle yani uzunluk büyüklük gibi değerler ile ilgilenmez. Topolojinin tarihçesi ile topolojinin nereden ve hangi gereksinimler ile ortaya çıktığını anlatmaya çalıştık. Ayrıca bu araştırma ile, topolojinin matematikteki yerinin ayrıntılı açıklamasını vermenin yanı sıra günlük hayatta ve bilimin diğer dallarında da duruşunu ve topolojinin varlığının önemini vurgulamaya çalıştık.

Günlük hayatta bizler ile bu kadar iç içe ve uygulama alanı bu kadar fazla iken ilköğretim ve ortaöğretimde de ders olarak okutulabileceğini mümkün kılan bazı örnekler verdik.

Son olarak matematikte nokta küme topolojisi olarak bilinen topolojinin alt çalışma alanının son zamanlarda yapılan çalışmalar ile ne kadar geliştiğini bir takım özel topolojik uzayları tanıtıp örneklendirerek göstermeye çalıştık.

Topoloji kelimesini her ne kadar günlük yaşantımızda kullanmasak da farkında olmadan topolojik yaklaşımların araç olarak kullanıldığı ve hayatımızı kolaylaştıran birçok örneğin varlığını okuyucuya göstermeye çalıştık.

Sevgili okuyucu umarım keyifli bir anlatımla topolojiyi tanıdığınıza memnun olmuşsunuzdur, sevgiler…

KAYNAKÇA

AHMAT, B., KHARAL, A. (2009), On fuzzy soft sets, *Adv. Fuzzy Syst.*, 586507.

ALCANTUD, J. C. R. (2022), The relationship between fuzzy soft and soft topologies, *Int. J. Fuzzy Syst.*, 24, 1653–1668.

AL-ODHARİ, M. (2015) On infra-topological spaces, *Int. J. Math. Archive,* 6 (11), 179–184.

AL-ODHARİ, M. (2016), I-continuous functions and I*-continuous functions on infra topological spaces, *Int. J. Math. Archive,* 7 (3), 18–22.

AL-SHAMI, T. M. (2016), Some results related to supra topological spaces, *J. Adv. Stud. Topol.* 7 (4), 283–294.

ATAY, A., (2010), *Topolojik Toplamlar ve Bazı Sonuçlar*, Yüksek Lisans Tezi, Dicle Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü, Diyarbakır.

ATAY, A. (2023), Disjoint union of fuzzy soft topological spaces, *AIMS Mathematics,* 8(5): 10547–10557.

ATAY, A., EREN, F. (2023), Kuratowskı Closure Operators In Soft Ideal Topologıcal Spaces, *Acta Universitatis Apulensis,* 74, 11-22.

ATAY, A., ALŞİBLİ, F. (2023), Bulanık Topolojik Uzayların Toplamları Üzerine, *Int. J. Pure Appl. Sci.* 9(1);197-208.

BİZİM, O. (2013) *Genel Topoloji*, Dora Basım- Yayın Dağıtım Ltd. Şti., Bursa.

COZZARELLI, N.R. (1992), Evoiution of DNA Topology, *Proc. of Symposia in Appl. Maths,* vol 45.

DELİCE, A., KARAASLAN, K. G., (2016). Topolojinin İlkokul, Ortaokul Ve Lise Matematik Dersi Öğretim Programlarında Ele Alınmasının Tartışılması, *Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 43, 43-66.

ERCAN, Z. (2020), *Topoloji,* ODTÜ Yayıncılık, Ankara.

GUNNAR, C., MİKAEL, V. J., *Topological Data Analysis with Applications*, Cambridge University Press.

GURDCES, (1969), *Bending and stretching*. Athens, GA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED113164)

HACISALİHOĞLU, H. (1975), *Dönüşümler ve Geometriler,* MEB Devlet Kitapları, İstanbul.

JOSHI, K. D. (1983). *Introduction to General Topology,* John Wiley and Sons Ltd., New York.

KARACA, İ. (2021), *Çözümleriyle Topoloji Problemleri,* Palme Yayınevi, Ankara.

KARAŞ, İ. R., BATUK, F. (2005), Coğrafi Bilgi Sistemlerinde Topoloji Kavramı, *10. Türkiye Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı,* Ankara.

KOZAE, A. M., SHOKRY, M. ve ZİDAN, M. (2016), Supra topologies for digital plane, *AASCIT Commun.,* 3 (1), 1–10.

KURATOWSKİ, K. (1933), Topolgie 1, Warszawa.

LIPSCHUTZ, S. (1965), *Schaum's Outline of Theory and Problems of General Topology*. McGRAW-HILL Book Company, Sayfa Sayısı:239, United States of America.

MAJİ, P. K., BISWAS ve R., ROY, A. R. (2001), Fuzzy soft sets, *J. Fuzzy Math*., 9, 589-602.

MAJİ, P.K., BİSWAS, R. ve ROY, A.R. (2003), Soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555–562.

MASHHOUR, A. S., ALLAM, A. A., MAHMOUD, F. S., ve KHEDR, F. H. (1983), On supra topological spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.* 14 (4), 502–510.

MC CARTY, G. (1967), *TOPOLOGY An Introduction With Application to Topological Groups.* McGRAW-HILL Book Company, Sayfa Sayısı: 270, United States of America.

MOLODTSOV, D. (1999), Soft set theory-rst results, *Computers and Mathema tics with Applications*, 37, 19–31.

PENROSE, R. (1979). The Topology of Ridge Systems, *Annals of Human Genetics* 42 (4): 435–444. doi:10.1111/j.1469-1809.1979.tb00677.x

POWELL, B. (Ed.) (1965). *Mathematics for the elementary school, Unit 1, Geometry. Minneapolis*, MN: Minnesota School Mathematics and Science Center, Minnesota University. (ERIC Document Reproduction Service No. ED094982).

RENTELN, P. ve DUNDES, A. (2005), Foolproof: a sampling of mathematical folk humor. *Not. Am. Math. Soc*. 52, 24–34.

SHABİR, M. and NAZ, M. (2011), On soft topological spaces, *Computers Mathematics with Applications*, 61, 1786-1799.

ŞİMŞEKLER, T., YÜKSEL, Ş. (2013), Fuzzy soft topological spaces, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 5, 87–96.

TANAY, B., KANDEMİR, M. B. (2011) Topological structures of fuzzy soft sets, *Comput. Math. Appl*., 61, 412–418.

TARIM, M. (2006), *Mimari tasarımda topoloji,* Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

TÜDEŞ,T. ve BIYIK, C., (1984), *Kadastro Bilgisi,* Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

VAROL, B. P., AYGÜN, H. (2012) Fuzzy soft topology, *Hacettepe J. Math. Stat.*, 41, 407–419.

WHİTE, J.H. (1989), *An introduction to the geometry and topology of DNA structure*, CRC Press. Inc., Boca Raton.

WHİTE, J.H. (1992), Geometry and Topology of DNA and DNA-protein interactions, *Proc. of Symp. In Appl. Maths,* vol 45.

WİTCZAK, T. (2022), Infra-Topologıes Revısıted: Logıc And Clarıfıcatıon Of Basıc Notıons, *Commun. Korean Math. Soc.*, 37 (1), 279–292.

YAŞAYAN, A., (2001), CBS proje yönetimi ders notları.

YILMAZ, G., PİRİNÇÇİ, B. ve ERDOĞAN, M. (2005), DNA'nın Topolojisi ve Geometrisi, *Hasan Ali Yücel Eğitim Fakültesi Dergisi*, 3, 11-22.

YOMRALIOĞLU, T., (2000), *Coğrafi Bilgi Sistemleri Temel Kavramlar ve Uygulamalar*, Akademi Kitabevi, 2. Baskı, İstanbul.

ZADEH, L. A. (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8 (3), 338-353.

İNTERNET BAĞLANTILARI:

https://www.matematiksel.org/parmak-izinin-topolojisi/

https://www.matematiksel.org/topoloji-nedir/

https://bilimgenc.tubitak.gov.tr/algimizi-zorlayan-nesne-mobius-seridi

https://www.muhendisbeyinler.net/klein-sisesi-ve-matematiksel-illuzyon/

https://topologistan.com/2021/03/18/her-sey-birdenbire-mi-oldu-geometriden-topolojiye-bir-yol-gider/

https://en.wikipedia.org/wiki/Topology#Topologies_on_sets

ÖZGEÇMİŞ

Arife ATAY, 2000 yılında Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. Yüksek Lisansını ve Doktorasını Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Matematik Bilim Dalında tamamladı. 2007'den bu yana Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde öğretim üyesi olarak çalışmakta olan Atay, aynı zamanda Matematik Bölüm Başkan Yardımcılığı ve Topoloji Anabilim Dalı Başkanlığı idari görevlerini yürütmektedir. Yazarın ulusal ve uluslararası dergilerde yayınlanmış çeşitli makaleleri bulunmaktadır. Evli ve iki çocuk annesidir.

[Belgeden yaptığınız güzel bir alıntıyla okurlarınızın dikkatini çekin veya önemli bir noktayı vurgulamak için bu alanı kullanın. Bu metin kutusunu sayfada herhangi bir yere yerleştirmek için sürüklemeniz yeterlidir.]