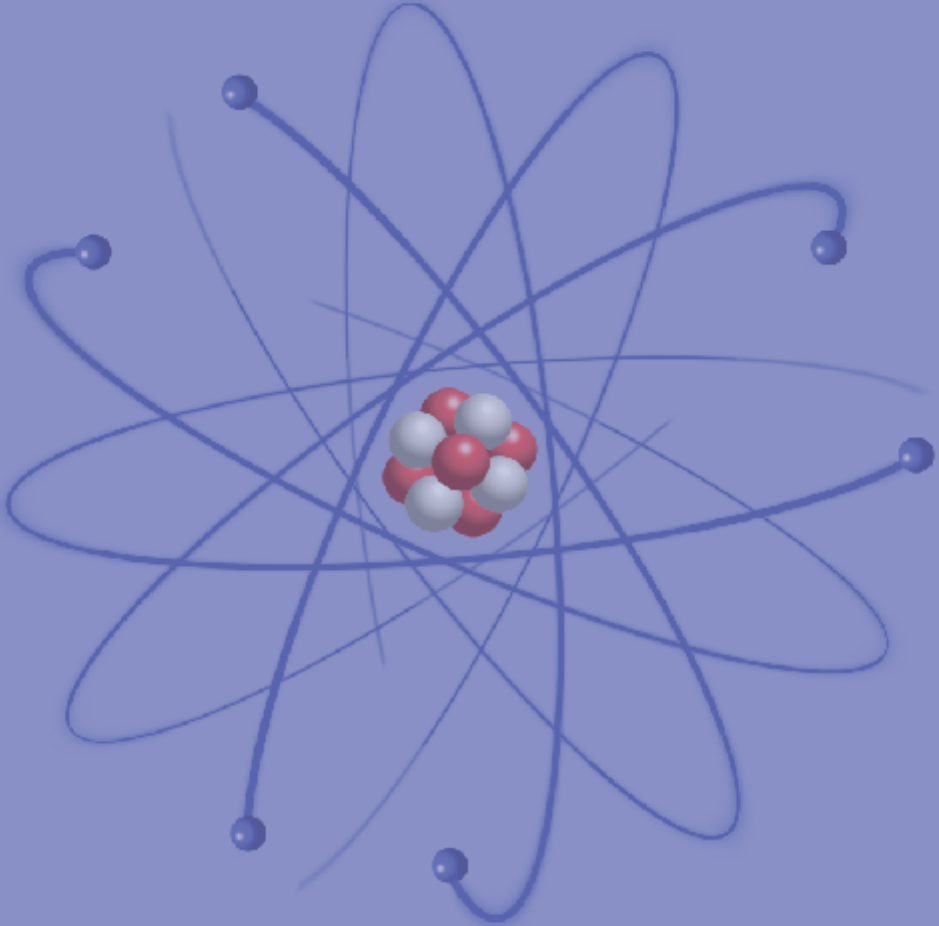


# BOHR HAMİLTONYENİN $\gamma = 30^\circ$ İÇİN KRATZER POTANSİYELİ İLE ÇÖZÜMÜ

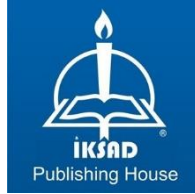
Prof. Dr. İbrahim YİĞİTOĞLU  
Burcu UÇAR



# BOHR HAMİLTONYENİN $\gamma = 30^\circ$ İÇİN KRATZER POTANSİYELİ İLE ÇÖZÜMÜ

Prof. Dr. İbrahim YİĞİTOĞLU<sup>1</sup>  
Burcu UÇAR<sup>2</sup>

DOI: <https://dx.doi.org/10.5281/zenodo.14037134>



---

<sup>1</sup> Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Tokat, Türkiye.  
Orcid No: 0000-0001-9029-0897

\*Bu çalışma tezden üretilmiştir.

<sup>2</sup> Avrasya üniversitesi, Sağlık Hizmetleri Meslek Yüksekokulu, Tıbbi Görüntüleme Teknikleri Programı, Trabzon, Türkiye Orcid no: 0000-0003-1872-2477

Copyright © 2024 by iksad publishing house  
All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, distributed or  
transmitted in any form or by  
any means, including photocopying, recording or other electronic or mechanical  
methods, without the prior written permission of the publisher, except in the case of  
brief quotations embodied in critical reviews and certain other noncommercial uses  
permitted by copyright law. Institution of Economic Development and Social

Researches Publications®

(The Licence Number of Publicator: 2014/31220)

TÜRKİYE TR: +90 342 606 06 75

USA: +1 631 685 0 853

E mail: iksadyayinevi@gmail.com

www.iksadyayinevi.com

It is responsibility of the author to abide by the publishing ethics rules.

Iksad Publications – 2024©

**ISBN: 978-625-367-895-1**

Cover Design: İbrahim KAYA

November / 2024

Ankara / Türkiye

Size = 16x24 cm

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>i</b>
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR</b> .....	<b>ii</b>
<b>GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>1. GENEL BİLGİLER</b> .....	<b>4</b>
<b>1.1. Bohr Hamiltonyen</b> .....	<b>4</b>
<b>1.2. Kritik Nokta Simetrisi</b> .....	<b>7</b>
1.2.1. X(5) Kritik Nokta Simetrisi.....	9
1.2.2. E(5) Kritik Nokta Simetrisi .....	13
1.2.3. Z(5) Kritik Nokta Simetrisi .....	14
1.2.4. Z(4) Kritik Nokta Simetrisi .....	15
<b>1.3. Kratzer Potansiyeli</b> .....	<b>18</b>
<b>2. MATERYAL VE YÖNTEM</b> .....	<b>20</b>
<b>2.1. Nikiforov-Uvarov Yöntemi</b> .....	<b>20</b>
2.1.1. Standart Nikiforov-Uvarov Yöntemi.....	20
2.1.2. Parametrik Standart Nikiforov-Uvarov Yöntemi .....	21
<b>2.2. Z(4) Kritik Nokta Simetrisi <math>\gamma = 30^\circ</math> için Kratzer Potansiyelinin Uygulanması</b> .....	<b>24</b>
<b>3. BULGULAR</b> .....	<b>29</b>
<b>4. TARTIŞMA VE SONUÇ</b> .....	<b>47</b>
<b>KAYNAKÇA</b> .....	<b>52</b>

## SİMGELER VE KISALTMALAR

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$B_m$	Kütle parametresi
$B$	Küresel şekilden sapmayı ölçen deformasyon koordinatı
$\gamma$	Eksenel simetriden sapmanın bir ölçüsü
$\theta_i$	Euler açıları ( $i=1, 2, 3$ )
$D_{M,K}^I(\theta_i)$	Euler açılarının Wigner fonksiyonları
$L$	Açısal momentum kuantum sayısı
$u(\beta)$	$\beta$ değişkenine bağlı potansiyel
$u(\gamma)$	$\gamma$ değişkenine bağlı potansiyel
$\varepsilon$	İndirgenmiş enerji
$\langle \beta^2 \rangle$	$\beta^2$ ' nin $\xi(\beta)$ üzerinden ortalaması
$J_\nu$	Bessel fonksiyonu
$L_n^K$	Laguerre polinomu
$\mu$	Açısal momentumun laboratuvar sabit $\hat{z}$ -ekseni üzerine iz düşümü
$\alpha$	Açısal momentumun laboratuvar cisim-sabit $\hat{x}'$ -eksenine olan izdüşümü
$n_w$	Wobbling kuantum sayısı
$b$	İnternükleer ayrışma dengesi
$D_e$	Ayrışma enerjisi
<b>Kısaltmalar</b>	<b>Açıklama</b>
IBM	Etkileşen Boson Modeli
gsb	Temel Seviye Bandı (Ground State Band)
min	Minimum
RTR	Katı Üç Eksenli Rotor (Rigid Triaxial Rotor)

## GİRİŞ

Atom çekirdekleri denge durumunda şekillerine göre karakterize edilir. Bu şekiller birçok durumda kararlı çekirdeklere karşılık gelirken, sistemin oldukça kararsız bir yapıda olduğu ve iki farklı şekil arasında bir faz geçişine uğradığı durumlar da vardır. Burada ortaya çıkan problem, faz geçiş bölgesinde ve özellikle faz geçiş noktasında bulunan çekirdeklerin yapısının nasıl tanımlanacağıdır. Bu sorun, etkileşen boson modeli (IBM) adı verilen cebirsel model çerçevesinde araştırılmıştır (Iachello ve Arima, 1987; Iachello ve Levine, 1995). Bu yaklaşımda, farklı şekiller (fazlar), bazı  $G$  cebirsel yapıların dinamik simetrisine karşılık gelir (Iachello, 2001).

Dinamik simetrisi, birçok fiziksel sistemin (çekirdekler, moleküller, atomik yapılar, vb) özelliklerini tanımlamak için yararlı bir araç sağlamıştır. Tanım olarak (Iachello, 1979), dinamik simetri,  $H$  Hamilton operatörünün bir  $G \supset G' \supset G'' \supset \dots$  cebir zincirinin  $C_i$  Casimir operatörleri cinsinden yazılabildiği durumdur. En dikkat çekici örnekler, nükleer fizikteki etkileşen boson modelinin (Iachello ve Arima, 1987) dinamik simetrisi ve moleküler fizikteki vibron modelidir (Iachello ve Levine, 1995). Bu tip dinamik simetrisi, sorunun cebirsel yapısını analiz ederek kolayca fark edilebilir. Cebir  $G$ 'yi tüm alt-cebir zincirlerine ayırarak,  $G$ 'nin olası tüm dinamik simetrisi bulunabilir. Etkileşen boson modelinde, örneğin,  $G \equiv U(6)$  zincirde görünen ilk alt cebir  $U(5)$ ,  $SU(3)$ ,  $SO(6)$  ile etiketlenen üç olası dinamik simetri vardır. Dinamik simetrisi tam olarak çözülebilir problemlerle ilgilidir ve açık analitik formda gözlenebilirliğe ait tüm sonuçları üretirler. Bu nedenle, deneysel verilerin analizinde son derece yararlıdır ve önemli keşiflere yol açmıştır (Cizewski ve ark., 1978; Iachello, 2000).

Etkileşen boson modeli, nükleer kolektif uyarılmaların geometrik modellerin aksine, cebirsel nitelikte alternatif bir açıklama sağlar. Bu gerçekçi teorik model, düşük enerjili kolektif durumları ve çift-çift çekirdeğin çok sayıda elektromanyetik geçişlerini başarılı bir şekilde tanımlayabilmiştir. Etkileşen boson modelinin asıl modelinde (IBM1), çekirdekler, açısal momentum  $L=0$  (s-bosonlar) veya açısal momentum  $L=2$  (d-bosonlar) taşıyan bosonlardan oluşan sistemler olarak kabul edilir (Iachello ve Arima, 1987). Bosonların sayısı, değerlik fermiyonlarının sayısının yarısına  $N=n/2$  eşit olduğu bosonlar sistemi, tipik olarak iki cisim etkileşimlerine kadar olan bir Hamiltoniyen ile

ifade edilir.  $N=n/2$  boson sayısını korunur ve dönmeye göre değişmezdir.  $s$  ve  $d$  bosonlarının simetrisi  $U(6)$  grup yapısındadır. Geometrik olarak dinamik simetritler etkileşen boson modelinde  $U(5)$ ; küresel titreşime,  $SU(3)$ ; aksel simetrik rotasyona ve  $O(6)$ ;  $\gamma$ -kararsız ( $\gamma$ -soft,  $\gamma$ -bağımsız) rotasyona karşılık gelir (Kotb, 2016).

Atom çekirdeği, kendi bileşenlerinin proton ve nötron sayısının bir fonksiyonu olarak faz geçişleri sergilerler. Bu faz geçişleri her zaman termodinamik tipte değildirler, ancak bunun yerine denge şeklinde ve temel seviye ile düşük enerjili yapılar arasında kuantum faz geçişleridir. Bu durum faz geçiş noktalarında çekirdeklerin yapısını açıklayan 'kritik nokta simetritleri' kavramına odaklanan yeni bir araştırma alanına yol açtı (Casten, 2006). Iachello (2000, 2001, 2003) çekirdeklerin kritik nokta davranışlarını inceleyen çalışmasında,  $E(5)$ ,  $X(5)$  ve  $Y(5)$  adı verilen üç yeni dinamik simetriyi ortaya koydu.  $E(5)$ , küresel vibratörden  $\gamma$ -kararsız ( $U(5) \leftrightarrow O(6)$ ) şekillere geçişteki kritik noktayı,  $X(5)$ , küresel vibratör ile aksel deforme ( $U(5) \leftrightarrow SU(3)$ ) şekiller arasındaki kritik noktayı,  $Y(5)$  ise aksel deforme ile üç aksel deforme şekiller arasındaki kritik noktayı tanımlamaktadır.  $Z(4)$  ve  $Z(5)$  modelleri ise aksel deforme oblate ile aksel deforme prolate ( $\overline{SU(3)} \leftrightarrow SU(3)$ ) arasındaki kritik noktayı tanımlamaktadır, sırasıyla  $\gamma = 30^\circ$  ve  $\gamma \approx 30^\circ$  alınarak elde edilen çözümlerdir.

Bohr Hamiltonyeninin tam ve yaklaşık olarak iki tip çözümü vardır.  $E(5)$  modeli,  $\gamma$ 'dan bağımsız potansiyeller için Bohr Hamiltonyeninin tam çözümü olarak elde edilir. Bohr diferansiyel denkleminde kullanılan potansiyel  $\gamma$ 'dan bağımsızdır ve  $\beta$  serbestlik derecesine bağlı terim ise sonsuz kare kuyu potansiyel olarak alınır.  $X(5)$  modeli,  $\gamma \approx 0^\circ$  için yaklaşık bir çözüm olarak elde edilir. Bir diğer yaklaşık çözüm ise  $Z(5)$  (Bonatsos ve ark., 2004) denilen  $\gamma \approx 30^\circ$  için elde edilir. Bütün bu durumlarda, beş serbestlik derecesi (kolektif değişkenler  $\beta$ ,  $\gamma$  ve üç Euler açıları) dikkate alınır.  $Z(4)$  modeli (Bonatsos ve ark., 2005), Bohr Hamiltonyeninin  $\gamma = 30^\circ$  için tam bir çözümüdür ve  $\gamma$ 'dan bağımsız ve sadece dört serbestlik derecesini ( $\beta$  ve Euler açıları) dikkate alınarak elde edilir.

İki farklı şekil-faz geçiş bölgesinde bulunan çekirdeklerin yapılarının araştırılması amacıyla değişik potansiyeller seçilerek Bohr Hamiltonyeninin tam ve yaklaşık analitik çözümlerinin elde edildiği birçok çalışma yapılmıştır.

Örneğin; Mors (Boztosun ve ark., 2008), Kratzer (Fortunato ve Vitturi, 2004; Fortunato ve ark., 2006; Bonatsos ve ark., 2013), Coulomb (Fortunato ve Vitturi, 2004; Fortunato ve ark., 2006), Davidson (Fortunato ve ark., 2006; Bonatsos ve ark., 2013; Yigitoglu ve Bonatsos, 2011; Sobhani ve Hassanabadi, 2017; Yigitoglu ve Gokbulut, 2018), Eckart (Naderi ve Hassanabadi, 2016), Manning-Rosen (Chabab ve ark., 2016), Killingbeck (Sobhani ve Hassanabadi, 2016) ve Sextic (Buganu ve Budaca, 2015) gibi çeşitli potansiyelleri kullanılmıştır.

Bu çalışmada  $Z(4)$  modeli için Schrödinger denkleminin  $\beta$ -kısımında Kratzer potansiyeli seçilerek bir çözüm türetildi. Enerji özdeğerleri ve dalga fonksiyonu Nikiforov-Uvarov tarafından geliştirilen analitik bir yöntem ile elde edildi. Bu çözüm  $Z(4)$ -K Model olarak isimlendirildi. Temel seviye bandı (gsb),  $\beta_1$  bandı ve  $\gamma$  bandına ait enerji seviyeleri ve dalga fonksiyonu elde edildi. Temel seviye bandı için  $Z(4)$ -K model tahminleri,  $^{74,76}\text{G}$ ,  $^{110-114}\text{Ru}$ ,  $^{128-132}\text{Xe}$ ,  $^{192-198}\text{Pt}$ ,  $^{192}\text{Os}$  çekirdeklerine ait mevcut deneysel veriler,  $Z(4)$  (Bonatsos, 2005),  $Z(5)$  (Bonatsos ve ark., 2004),  $Z(4)$ -D ( $Z(4)$ -Davidson potansiyeli) (Yigitoglu ve Gokbulut, 2018) ve  $Z(4)$ -S ( $Z(4)$ -Sextic potansiyeli) (Buganu ve Budaca, 2015) model tahminleri ile karşılaştırıldı.



## 1. GENEL BİLGİLER

### 1.1. Bohr Hamiltonyeni

Kolektif modun spektrum ve dalga fonksiyonunu tanımlayan Bohr Hamiltonyeni (Bohr, 1952) oluşturmak için Euler açıları ve kolektif koordinatları

$$q_1 = \theta_1 ; \quad q_2 = \theta_2 ; \quad q_3 = \theta_3 ; \quad q_4 = \beta ; \quad q_5 = \gamma \quad (1)$$

şeklinde tanımlanır. Bohr Hamiltonyeni'deki kinetik enerji

$$T = \frac{B}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (2)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik 2.'de yer değiştirme karesi  $ds^2 = g_{ij}dq_i dq_j$ 'dir. Hamiltonyeni, Pauli-Podolsky kuralı ile kuantum mekaniksel olarak elde edilir (Podolsky, 1928).

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} g^{ij} \partial_j \Phi \quad (3)$$

Eşitlik 3.'deki simetrik matrisi Eşitlik 4.'deki gibi ifade edilir:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & 0 & 0 \\ g_{31} & 0 & g_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{55} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$g$  ve  $g^{ij}$  sırasıyla  $g_{ij}$ 'nin determinanı ve ters matrisidir (Sitenko ve Tartakovski, 1975).

$$g = \frac{J_1 J_2 J_3}{B^3} \beta^2 \sin^2 \theta_2 = 4\beta^8 \sin^2 3\gamma \sin^2 \theta_2 \quad (5)$$

buradaki eylemsizlik momentleri Eşitlik 6.'da gösterilmiştir.

$$J_k = 4B\beta^2 \sin^2(\gamma - k \frac{2\pi}{3}) \quad (6)$$

Son olarak, Eşitlik 3.'den, kolektif değişkenlerin herhangi bir potansiyel açısından Eşitlik 7.'deki Bohr Hamiltonyen denklemini elde edilir.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B_m} \left[ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)} \right] + V(\beta, \gamma) \quad (7)$$

burada  $B_m$ , kütle parametresidir. Esas deformasyon koordinatları  $\beta$  (küresel şekilden sapmayı ölçen deformasyon koordinatı),  $\gamma$  (eksenel simetriden sapmanın bir ölçüsü) ve  $\hat{Q}_k$  ( $k=1,2,3$ ) gerçek yapı içindeki açılal momentumun bileşenleri olmak üzere Bohr Hamiltonyen beş boyutludur.

$$\hat{Q}_1 = \hat{Q}_x = -i \left( -\frac{\cos\theta_3}{\sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \sin\theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \cot\theta_2 \cos\theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right), \quad (8)$$

$$\hat{Q}_2 = \hat{Q}_y = -i \left( -\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cos\theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \cot\theta_2 \sin\theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right), \quad (9)$$

$$\hat{Q}_3 = \hat{Q}_z = -i \frac{\partial}{\partial \theta_3}. \quad (10)$$

Kolektif dalga fonksiyonu;

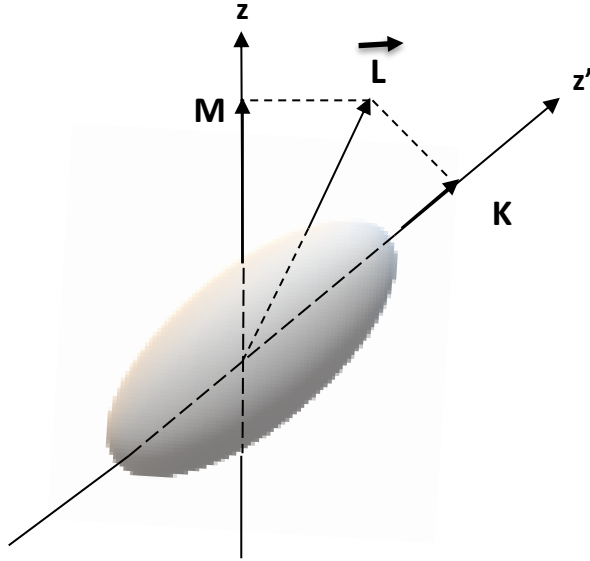
$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = f(\beta) \Phi_{M,K}^L(\gamma, \theta_i) \quad (11)$$

şeklinde yazılır.

$\Phi_{M,K}^L$ , Wigner fonksiyonlarına  $D_{M,K}^L(\theta_i)$  göre Eşitlik 12.'deki gibi tanımlanmaktadır.

$$\Phi_{M,K}^{L,\tau}(\gamma, \theta_i) = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{K,0})}} g_K^{L,\tau}(\gamma) [D_{M,K}^L(\theta_i) + (-1)^L D_{M,-K}^L(\theta_i)] \quad (12)$$

burada  $\theta_i$  ( $i=1,2,3$ ) Euler açıları,  $D_{M,K}^L(\theta_i)$  Euler açılarının Wigner fonksiyonları,  $L$  açısal momentum kuantum sayısıdır.  $M$  ve  $K$ , sırasıyla  $z$  eksenindeki laboratuvar sabiti,  $z'$  eksenindeki cisim sabiti ve kuantum sayısı  $L$ 'nin izdüşümleridir (bkz. Şekil 1).



**Şekil 1:**  $z$  eksenindeki laboratuvar sabiti ve  $z'$  eksenindeki cisim-sabitinin toplam açısal momentum vektörünün izdüşümleri

Normalleştirme şartı ve hacim elemanı

$$1 = \int_{\beta=0}^{\infty} \int_{\gamma=0}^{\pi/3} \int_{\theta_1=0}^{2\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\theta_3=0}^{2\pi} \Psi^*(\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \Psi(\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3) dv \quad (13)$$

$$dv = \beta^4 d\beta |\sin 3\gamma| d\gamma d\theta_1 \sin\theta_2 d\theta_2 d\theta_3$$

şeklinde verilir.

## 1.2. Kritik Nokta Simetrisi

Kolektif çift-çift çekirdeğin üç tane idealleştirilmiş, bilinen ve yaygın olarak kullanılan durumları vardır. Bu durumlar harmonik vibratör (Scharff-Godhaber ve Weneser, 1955), deforme simetrik rotor (Bohr ve Mottelson, 1953) ve  $\gamma$ -soft (Wilets ve Jean, 1956)'dur. Nükleer yapının bu durumları bir simetri üçgenin köşeleri ile ifade edilir. Bunlar Etkileşen boson yaklaşım modelinde (Iachello ve Arima, 1987) sırasıyla U(5), SU(3) ve O(6) dinamik simetrisi terimlerine karşılık gelir. Bu simetrisinin her biri farklı karakteristik özelliklere sahiptir. Bohr Hamiltonyen tarafından elde edilen spektrumda  $R_{4/2}$  enerji oranları bu karakteristik özelliklerden biridir ve her bir çekirdeği tanımlamak için ayırt edici bir özelliktir. Açısal momentum sayısı 4 olan enerji seviyesinin, açısal momentum sayısı 2 olan enerji seviyesine oranı  $R_{4/2}$  enerji oranını verir (bkz. Eşitlik 14.).

$$R_{4/2} = \frac{E_4 - E_0}{E_2 - E_0} \quad (14)$$

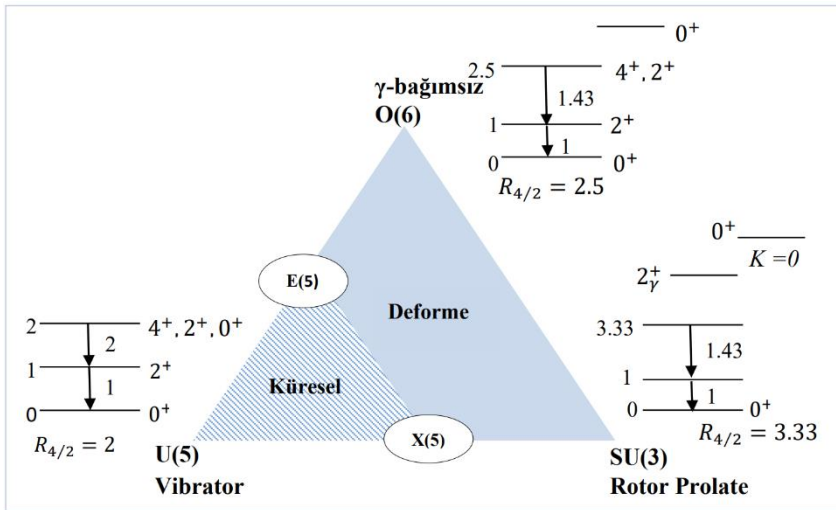
Kolektif model çerçevesinde  $R_{4/2} = 2.0; 2.5; 3.33$  enerji oranları sırasıyla harmonik vibratör,  $\gamma$ -kararsız rotor ve deforme olmuş bir aksel rotor yapılarına karşılık gelir (Casten, 2006).  $R_{4/2} = 2.0$  için, kapalı kabuk etrafındaki çekirdekler neredeyse küresel bir şekle ve yüzey titreşimlerine sahiptir.  $R_{4/2} = 2.5$  için, çekirdek şekli sürekli prolata ve oblate arasında değişmektedir. Kararlı bir şeklin olmaması nedeniyle, potansiyel  $\gamma$ 'dan bağımsızdır. Herhangi bir zamanda, üç eksenin uzunlukları farklıdır.  $R_{4/2} =$

3.33 için, kapalı kabuk konfigürasyon uzak nükleonların sayısına sahip olan çekirdekleri kalıcı şekilde prolate veya oblate deforme şekle sahiptir. Titreşime ek olarak, simetri eksenine dik olarak dönerler.

**Tablo 1:** Bazı kritik nokta simetrisi için  $R_{4/2}$  enerji oranları

Model	Potansiyel $\beta$	Potansiyel $\gamma$	Geçişler	Tahminler $R_{4/2}$	Kaynak
E(5)	$\beta^{2n} \rightarrow \infty$	Bağımsız	Kritik Nokta	2.19	Iachello, 2000
X(5)	$\beta^{2n} \rightarrow \infty$	Harmonik osilatör min $\gamma=0^\circ$	Kritik Nokta	2.91	Iachello, 2001
Z(5)	Sonsuz Kuyu Potansiyeli	Harmonik osilatör min $\gamma=30^\circ$	Prolate–Oblate	2.35	Bonatsos ve ark., 2004
Z(4)	Sonsuz Kuyu Potansiyeli	$\gamma=30^\circ$	Vibrator- $\gamma$ -Kararsız	2.23	Bonatsos ve ark., 2005

Bu üç sınır Şekil 2’deki Casten üçgeninin kenarlarını oluşturmaktadır. Sınırlar arasında gözlenen şekil faz geçişleri, basınç, sıcaklık vb. gibi sürekli kontrol parametrelerine bağlı olmayan faz geçişlerinin aksine kontrol parametresi olarak nükleon sayılarına bağlı kuantum faz geçişleridir.



**Şekil 2:** Casten üçgeni (Casten, 2006)

İki Kritik Nokta Simetri modeli vardır. Üçgenin  $U(5) \leftrightarrow SU(3)$  bacağı boyunca meydana gelen birinci dereceden faz geçişi için  $X(5)$  kritik nokta simetrisi ve  $U(5) \leftrightarrow O(6)$  bacağı boyunca meydana gelen ikinci dereceden bir faz geçişi için  $E(5)$  kritik nokta simetrisidir (bkz. Şekil 2). Böylece üçgeni, küresel simetri ve deforme olmuş simetri olmak üzere iki bölgeye ayırır. Sistemin faz geçiş bölgesindeki ve özellikle kritik noktadaki özellikleri, geometrik bir potansiyel  $V(\beta, \gamma)$ 'nın farklı seçimleri için Bohr Hamiltonyen analitik çözümleridir (Casten, 2006).

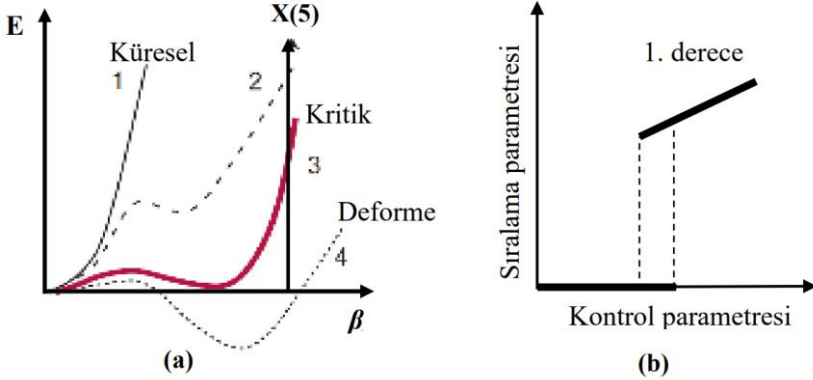
$E(5)$  modeli,  $\gamma$ -bağımsız ( $\gamma = 0^\circ$ ) potansiyeller için Bohr Hamiltonyenin tam çözümü olarak elde edilirken;  $X(5)$  modeli ise,  $\gamma \approx 0^\circ$  için Bohr Hamiltonyenin yaklaşık bir çözümüne karşılık gelir.  $\gamma \approx 30^\circ$  alındığında prolate yapı ile oblate yapı arasında şekil-faz geçiş bölgesindeki kritik nokta  $Z(5)$  (Bonatsos ve ark., 2004) olarak isimlendirilen diğer bir yaklaşık çözümde elde edilmiştir. Bütün bu durumlarda, beş serbestlik derecesi (kolektif değişkenler  $\beta$ ,  $\gamma$  ve üç Euler açıları) dikkate alınır.  $\gamma = 30^\circ$  olan ve  $Z(4)$  olarak isimlendirilen Bohr Hamiltonyenin tam çözümü elde edilir ve sadece dört serbestlik derecesi ( $\beta$  ve üç Euler açıları) dikkate alınır (Bonatsos ve ark., 2005).

### 1.2.1. $X(5)$ Kritik Nokta Simetrisi

$X(5)$ , küresel vibratörden eksenel rotora geçişin gerçekleştiği yol üstündeki kritik noktaya karşılık gelir. Potansiyelin minimum (min) ( $\gamma = 0^\circ$ ) olduğu durumda birinci dereceden faz geçişi görülmektedir. Birinci dereceden faz geçişi, küresel ve deforme fazları bir arada sergiler ve sıralama parametresi süresizdir. İki minimum değeri vardır. Faz geçişinin kritik noktası, potansiyeldeki bir minimum değerden diğer minimum değerine geçtiğinde ortaya çıkar (Casten, 2006).

Şekil 3a'da görüldüğü üzere; birinci derece faz geçişi için, birlikte var olma, deforme olmuş bir minimum uyarılmış bir konfigürasyon olarak (eğri2) ortaya çıkar. Değerlik nükleon sayısı artarsa enerji düşmeye başlar ve deforme denge durumu (eğri 4) oluşur. Minimumların dejenere olduğu kritik noktayı (eğri 3) gösterir ve sonsuz kare kuyu potansiyeline benzetilir. Birlikte var olan şekillerin dejenerasyon (bozunma) noktası (eğri 3) kritik bir noktadır. Kritik

noktada (eğri 3) deformasyonun kesintili olarak sıfırdan sonsuza değişir. Daha sonra (eğri 4), çekirdek deforme olur (Casten, 2006).



**Şekil 3:** a. Birinci derece faz geçişi için kritik noktadaki enerji yüzeylerini gösterir (Casten, 2009). b. Birinci derece faz geçişini gösterir (Casten, 2007).

Ehrenfest koşuluna göre, kritik noktada birinci dereceden faz geçişi ortaya çıkar çünkü kontrol parametresine göre sıralama parametresinin birinci türevi süreksizdir. Faz geçişinin meydana geldiği noktada bir bariyer vardır. Bunun sonucu olarak geçiş aniden belirir. Bu durum Şekil 3b’de görülmektedir.

Şekil 3a’da eğriler kritik noktada tipik potansiyel enerji yüzeyleri verir. Genel olarak, bu potansiyeller için Schrödinger denklemini analitik olarak çözmek mümkün değildir. Bununla birlikte; Iachello (2001), analitik çözümler üreten bir sadeleştirme önerdi (Casten, 2009).

Bohr Hamiltonyen diferansiyel denkleminin analitik çözümü ile  $X(5)$  dinamik simetrisine sahip çekirdeklerin yapısı elde edilebilir. Eşitlik 7.’deki Bohr Hamiltonyen denklemi Bohr (1952)’un kesin çözümlerini desteklemez.  $X(5)$  dinamik simetrisi için çözüm aşağıdaki gibidir.

Eşitlik 7.’de potansiyel  $\gamma = 0^\circ$  için minimumdur ve dalga fonksiyonu

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \varphi_{M,K}^L(\beta, \gamma) D_{M,K}^L(\theta_i) \quad (15)$$

şeklinde alınır. Burada  $\theta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) Euler açıları,  $D_{M,K}^L(\theta_i)$  Euler açılarının Wigner fonksiyonudur. Eşitlik 7.'de son terimi  $\gamma = 0^\circ$  alınarak

$$\sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right)} \cong \frac{4}{3} \frac{(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2)}{L^2} + Q_3^2 \left( \frac{1}{\sin^2\gamma} - \frac{4}{3} \right) \quad (16)$$

şeklinde yazılabilir. İndirgenmiş enerjileri ve potansiyelleri sırasıyla  $\varepsilon = \frac{2B_m}{\hbar^2} E$ ,  $u = \frac{2B_m}{\hbar^2} V$  değişkenleri ile tanımlanırsa, Hamiltonyen Eşitlik 17.deki gibi yazılabilir.

$$\left\{ -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4\beta^2} \left[ \frac{4}{3} L(L+1) + K^2 \left( \frac{1}{\sin^2\gamma} - \frac{4}{3} \right) \right] + u(\beta, \gamma) \right\} \varphi_K^L(\beta, \gamma) = \varepsilon \varphi_K^L(\beta, \gamma) \quad (17)$$

Şimdi  $u(\beta, \gamma) = u(\beta) + u(\gamma)$  olduğu durumda Eşitlik 17.'de  $\varepsilon = \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma$  yazılarak denklem yaklaşık olarak değişkenlerine aşağıdaki gibi ayrılabilir.

$$\left[ -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{4\beta^2} \frac{4}{3} L(L+1) + u(\beta) \right] \xi_L(\beta) = \varepsilon_\beta \xi_L(\beta) \quad (18)$$

$$\left[ -\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4\langle \beta^2 \rangle} K^2 \left( \frac{1}{\sin^2\gamma} - \frac{4}{3} \right) + v(\gamma) \right] \eta_K(\gamma) = \varepsilon_\gamma \eta_K(\gamma) \quad (19)$$

Burada,  $\langle \beta^2 \rangle$ ,  $\beta^2$ 'nin  $\xi(\beta)$  üzerinden ortalamasıdır. Potansiyelin,  $\beta$  değişkeni için kare kuyu ve  $\gamma$  değişkeni için harmonik osilatör olduğunu varsayalım. Kare kuyu potansiyeli için;  $u(\beta) = 0$  için  $\beta \leq \beta_W$  ve  $u(\beta) = \infty$  için  $\beta > \beta_W$  alınır.

$\xi(\beta) = \beta^{3/2} \xi(\beta)$ ,  $\varepsilon_\beta = k_\beta^2$  ve  $z = \beta k_\beta$  dönüşümleri yapılarak aşağıdaki Bessel denklemi elde edilir.



$$\xi'' + \frac{\xi'}{z} + \left[1 - \frac{v^2}{z^2}\right] \xi = 0; \quad \xi(\beta_W) = 0. \quad (20)$$

Burada

$$v = \left(\frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{4}\right)^{1/2} \quad (21)$$

şeklinde ifade edilir. Sınır koşulu özdeğer ve özfonksiyonlarını belirler. Buna göre;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta,s,L} &= (k_{s,L})^2 & \xi_{s,L}(\beta) &= c_{s,L} \beta^{-3/2} J_v(k_{s,L} \beta) \\ k_{s,L} &= \frac{x_{s,L}}{\beta_W} \end{aligned} \quad (22)$$

burada  $x_{s,L}$ ,  $J_v(z)$ ' nin  $s$  sıfır noktasıdır ve  $L$  açısal momentumdur.

$\gamma$ ' nın kuvvetinde genişleme yapıldığında  $\gamma$  değişkenindeki denklem, Eşitlik 19., iki boyutlu bir harmonik osilatörün radyal denklemi haline gelir.

$$\left[ -\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{(K/2)^2}{\langle \beta^2 \rangle} \frac{1}{\gamma^2} + (3a)^2 \frac{\gamma^2}{2} \right] \eta_K(\gamma) = \tilde{\varepsilon}_\gamma \eta_K(\gamma) \quad (23)$$

burada;

$$\tilde{\varepsilon}_\gamma = \varepsilon_\gamma + \frac{(K/2)^2}{\langle \beta^2 \rangle} \frac{4}{3}$$

Eşitlik 23. çözüldüğünde;

$$\eta_{n_\gamma, K}(\gamma) = c_{n_\gamma, K} \gamma^{|K/2|} e^{-(3a)\gamma^2/2} L_n^K(3a\gamma^2) \quad (24)$$

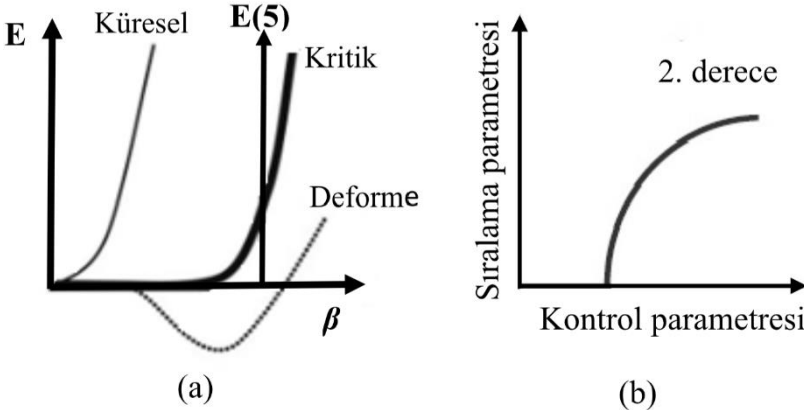
$$n = \left(\frac{n_\gamma - K}{2}\right)$$

burada  $n_\gamma=0,1,2,\dots$  ve  $L_n^K$ , Laguerre polinomudur.  $a$  parametresi harmonik osilatör potansiyelinin kuvveti veya genliğidir (Iachello, 2001; Fortunato, 2005).

### 1.2.2. E(5) Kritik Nokta Simetrisi

Küresel vibratör ile  $\gamma$ -Kararsız çekirdek yapısı arasında yer alan ve kritik noktaya karşılık gelen çözüm E(5) olarak isimlendirilir. Bu bölgede ikinci dereceden faz geçişi gözlenir. Burada potansiyel  $\gamma$ 'dan ( $V(\gamma) = \text{sabit}$ ) bağımsızdır yani  $V(\beta, \gamma) = U(\beta)$  (Casten, 2006). E(5) kritik nokta simetrisinin analitik çözümleri sadece  $\beta$  değişkenine bağlı sonsuz kuyu potansiyeli vasıtasıyla elde edilir. Enerji oranı  $R_{4/2} = 2.19$ 'dir.

İkinci derece faz geçişi, iki fazın bir arada bulunma durumu olmaksızın,  $\beta$ 'nın beklenen değerinin sürekli olduğu, potansiyelde iki minimum değeri oluşmadığı ve deformasyonun düzgün bir şekilde ortaya çıktığı durumda meydana gelir. Şekil 4a değerlik nükleonların farklı sayıları için üç eğri gösterir. Biri küresel minimuma ve diğeri (noktalı eğri) faz geçişinden sonra deforme olmuş minimuma sahiptir. Ortadaki eğri kritik noktadır. Hiçbir faz birlikteliği yoktur. Bu tür geçişler  $\gamma$  kararsız yapı ile küresel vibratör yapı arasındaki geçişlerde gözlenir (Casten, 2009).



**Şekil 4:** a. İkinci derece faz geçişi için kritik noktadaki enerji yüzeylerinin gösterimi (Casten, 2009). b. İkinci derece faz geçişini gösterir (Casten, 2007)

Ehrenfest koşuluna göre, kritik noktada ikinci dereceden faz geçişi ortaya çıkar. Şekil 4b'de görüldüğü üzere sıralama parametresinin kontrol parametresine göre ikinci türevi süresizdir.

### 1.2.3. Z(5) Kritik Nokta Simetrisi

Z(5) (Bonatsos ve ark., 2004) kritik nokta simetrisini oluşturmak için izlenen yol aşağıdaki gibidir.

- Bohr denklemi  $\gamma = 30^\circ$  alınarak değişkinlerine ayrılır.  $\gamma = 0^\circ$  (prolate)'den  $\gamma = 60^\circ$  (oblate)'e geçiş göz önüne alındığında, üç eksenli bölgeden ( $0^\circ < \gamma < 60^\circ$ ) geçmesi beklenir ve  $\gamma = 30^\circ$  bu geçişin tam ortasında bulunur. Bu varsayımı destekleyen deneysel kanıtlar vardır (Gizon ve ark., 1978).
- K kuantum sayısı  $\gamma = 30^\circ$  için (açısal momentumun cisim-sabit  $\hat{z}'$  eksenine izdüşümü) artık iyi bir kuantum sayısı değildir. Fakat  $\alpha$  kuantum sayısı, cisim-sabit  $\hat{x}'$  eksenindeki izdüşümü üç eksenli rotor çalışmasında bulunmuştur (Davydov ve Filippov, 1958; Davydov ve Rostovsky, 1959).
- $\beta$  değişkeninde bir sonsuz kuyu potansiyeli ve  $\gamma$  değişkeninde min  $\gamma = 30^\circ$  olan bir harmonik osilatör potansiyeli varsayılarak, Z(5) modeli elde edilir.

Bu üç adımla ilgili aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

- $\gamma = 30^\circ$ 'yi kullanmak demek katı üç eksenli şekillerin tercih edildiği anlamına gelmez. Aslında  $\gamma$ -yassı potansiyele sahip (Wilets ve Jean, 1956) bir çekirdek (Zamfir ve Casten, 1991) (prolate-oblate şekil faz geçişinden beklendiği gibi)  $\gamma$  üzerinde  $\gamma = 0^\circ$  ile  $\gamma = 60^\circ$  arasında ortalama  $\gamma_{ort} = 30^\circ$  değerine sahip olan düzgün bir salınım yapar. Bu nedenle karşılaştırılması gereken üç-eksenli yapıya karşılık gelen ( $\gamma = 30^\circ$ ) değerler ile bu salınımdan  $\gamma = 30^\circ$  için elde edilen değerdir. Ayrıca, büyük katı üç eksenli modellerin birçok tahminlerinin,  $\gamma$ -dalgalanmalarını içeren  $\gamma$  yumuşak modellere ait tahminlere çok yakın olduğu bilinmektedir ve  $\gamma_{katı}$  değerinin  $\gamma_{rms}$  değerlerine eşit olması bu benzerliklerden biridir. Ek olarak,  $\gamma$ -kararsızlığı ve  $\gamma = 30^\circ$ 'deki katı üç eksenlilik arasındaki eş değerlik, iz düşüm tekniklerini kullanarak

etkileşen boson modelindeki O(6) sınırına göre gösterilir. Bunlar göz önüne alındığında, Z(5) tahminlerinin, O(6) simetrisinin iyi örnekleri olduğu bilinen  $^{194}\text{Pt}$  gibi çekirdekleri açıklaması şaşırtıcı değildir.

- $\beta$ 'ya bağlı kısım bir sonsuz kuyu potansiyel alınması ( $\gamma$ ,  $30^\circ$ 'de sabit iken), üç eksenli vibratörden üç eksenli rotor geçişe karşılık gelir. Aynı şekilde X(5) modelindeki  $\beta$  sonsuz kuyu potansiyeli alınmasıyla ( $\gamma = 0^\circ$  varsayılır) bir vibratörden (U(5)) bir prolate rotoruna (SU(3)) geçişe karşılık gelir.
- Yukarıdakiler göz önüne alındığında; Z(5) modelinin prolate-oblate şekil faz geçişi daha önceki çalışmalarla uyumlu sonuçlar vermesi şaşırtıcı değildir. Daha önceki çalışmalarda, prolate-oblate kritik noktasının geçişini sağlayan  $\gamma$ -yumuşak havuzu  $\beta \neq 0$  bölgesinde  $\gamma = 0^\circ$  ile  $\gamma = 60^\circ$  arasında yani  $\beta = 0$  vibrasyonel bölgeden uzakta hareket ettirilir. Genişletilmiş Casten üçgeninde SU(3) (prolate) yapıdan  $\overline{\text{SU}}(3)$  (oblate) yapıya doğru hareket ettiğinde kritik nokta olarak O(6) belirlenir. Z(5) modelinde, aynı havuz  $\gamma = 30^\circ$ 'ye sabitlenerek üç eksenli vibratörden ( $\beta = 0$ 'a yakın) üç eksenli rotor'a ( $\beta=0$ 'dan uzak) hareket ettirilerek farklı şekillere geçilir (Bonatsos ve ark., 2004).

#### 1.2.4. Z(4) Kritik Nokta Simetrisi

Davydov ve Chaban'ın modelinde (Davydov, 1960) çekirdeğin  $\gamma$ -titreşimlerine göre katı olduğu varsayılmaktadır. Hamiltonyen dört değişkene ( $\beta$ ,  $\theta_i$ ) bağlıdır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B_m} \left[ \frac{1}{\beta^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^3 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2 \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} k \right)} \right] + U(\beta) \quad (25)$$

burada  $\beta$  ve  $\gamma$  kolektif koordinatlar (Bohr, 1952),  $Q_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) açısal momentumun bileşenleri ve  $B_m$  kütle parametresidir. Bu Hamiltonyen de  $\gamma$  bir parametre olarak davranır yani değişken olarak davranmaz. Eşitlik 25.'de

kinetik enerji terimi, E(5) ve X(5) modellerinde görünenden farklıdır, çünkü her durumda serbestlik derecelerinin sayısı farklıdır.

İndirgenmiş enerjileri  $\epsilon = (2B_m/\hbar^2)E$ , indirgenmiş potansiyelleri  $u = (2B_m/\hbar^2)U$  ve dalga fonksiyonu  $\Psi(\beta, \theta_i) = \phi(\beta)\psi(\theta_i)$ , burada  $\theta_i$  ( $i=1,2,3$  üç Euler açıları), düşünüldüğünde Eşitlik 25. değişkenlerine ayrılarak aşağıdaki gibi iki denklem oluşturur.

$$\left[ \frac{1}{\beta^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^3 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\lambda}{\beta^2} + (\epsilon - u(\beta)) \right] \phi(\beta) = 0 \quad (26)$$

$$\left[ \frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right)} - \lambda \right] \psi(\theta_i) = 0 \quad (27)$$

Eşitlik 27.'de  $\gamma = \pi/6$  olarak alındığında;

$$\left[ \frac{1}{4} (Q_1^2 + 4Q_2^2 + 4Q_3^2) - \lambda \right] \psi(\theta_i) = 0 \quad (28)$$

olarak yazılır. Eşitlik 28. ilk önce Meyer-ter-Vehn (1975) tarafından çözülmüştür. Dalga fonksiyonu Eşitlik 29. ve  $\lambda$ 'nın değeri Eşitlik 30. ile ifade edilir.

$$\begin{aligned} \psi(\theta_i) &= \psi_{\mu,\alpha}^L(\theta_i) \\ &= \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} \\ &\times \left[ D_{\mu,\alpha}^{(L)}(\theta_i) + (-1)^L D_{\mu,-\alpha}^{(L)}(\theta_i) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\lambda = \lambda_{L,\alpha} = L(L+1) - \frac{3}{4}\alpha^2 \quad (30)$$

burada  $D(\theta_i)$ , Euler açılarının Wigner fonksiyonları,  $L$  açılal momentumun özdeğerleridir.  $\mu$ , açılal momentumun laboratuvar sabit  $\hat{z}$ -ekseni üzerine iz

düşümdür.  $\alpha$  açılal momentumun laboratuvar cisim-sabit  $\hat{x}'$ -eksenine olan izdüşümüdür.  $\alpha$  değerleri çift tam sayı olmalıdır (Meyer-ter-Vehn, 1975).

Açılal momentumun  $\hat{x}'$ -ekseni üzerindeki iz düşümü  $\alpha$  yerine  $n_w = L - \alpha$  Wobbling kuantum sayısının kullanımı oldukça yaygındır. Burada  $n_w = 0$  temel seviye bandına karşılık gelirken ( $n_w > 0$ ),  $L = n_w, n_w + 2, n_w + 4, \dots$  bir dizi uyarılmış enerji bandlarını ifade eder.

Radyal olan Eşitlik 26. sonsuz kare kuyu potansiyeli ( $u(\beta) = 0$  için  $\beta \leq \beta_w, u(\beta) = \infty$  için  $\beta > \beta_w$ ) olması durumunda tam olarak çözülebilir.  $\phi(\beta) = \beta^{-1}f(\beta)$  dönüşümü kullanıldığında Eşitlik 26. Bessel denklemi elde edilir.

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} + \left( \epsilon - \frac{\nu^2}{\beta^2} \right) \right] f(\beta) = 0 \quad (31)$$

Burada;

$$\begin{aligned} \nu = \sqrt{\lambda + 1} &= \sqrt{L(L+1) - \frac{3}{4}\alpha^2 + 1} \\ &= \frac{\sqrt{L(L+4) + 3n_w(2L - n_w) + 4}}{2} \end{aligned} \quad (32)$$

Sınır koşulu  $f(\beta_w) = 0$ , enerji spektrumunu belirler,

$$\epsilon_{\beta;s,\nu} = \epsilon_{\beta;s,n_w,L} = (k_{s,\nu})^2, \quad k_{s,\nu} = \frac{x_{s,\nu}}{\beta_w} \quad (33)$$

elde edilir. Burada  $x_{s,\nu}, J_\nu(z)$  Bessel fonksiyonunun,  $s$ 'inci kökünü temsil eder. Enerji öz fonksiyonları ise;

$$\begin{aligned} \phi(\beta) &= \phi_{s,\nu}(\beta) = \phi_{s,n_w,L}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{c}} \beta^{-1} J_\nu(k_{s,\nu}\beta), \\ c &= \frac{\beta_w^2}{2} J_{\nu+1}^2(x_{s,\nu}) \end{aligned} \quad (34)$$

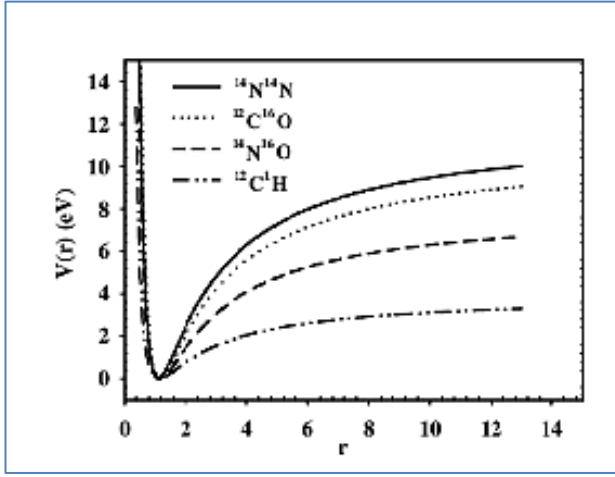
olarak yazılır. Burada  $c$  normalleştirme katsayısıdır ve  $\int_0^{\beta_w} \beta^3 \phi^2(\beta) d\beta = 1$  koşuluna bağlı olarak belirlenir. Burada kullanılan simgeler Iachello (2001) ile aynı tutulmuş ve enerji simgeleri için  $E_{s,n_w,L}$  kullanılmıştır. Temel seviye bandı için  $s = 1$ ,  $n_w = 0$ 'a karşılık gelir (Bonatsos, 2005).

### 1.3. Kratzer Potansiyeli

Kratzer potansiyeli (Kratzer, 1920), kuantum mekaniği tarihinde önemli bir rol oynamıştır. Şimdiye kadar, moleküler yapı ve etkileşimleri tanımlamak için yaygın olarak kullanılmıştır (Le Roy ve Bernstein, 1970). Kratzer potansiyeli;

$$V(\beta) = -2D_e \left( \frac{\beta_0}{\beta} - \frac{1}{2} \frac{\beta_0^2}{\beta^2} \right) \quad (35)$$

olarak tanımlanır. Burada  $D_e$  ayrışma enerjisidir ve  $\beta_0$ , internükleer ayrışma dengesidir. Bu potansiyelin şekli birkaç farklı molekül için Şekil 5'de gösterilmiştir. Kratzer potansiyeli hem itici hem de çekici uzun erimli bir kısım içerir Bu parçaların üst üste binmesi etkili bir potansiyel boşluk oluşturur. Bu potansiyel boşluk formunun doğru titreşim ve dönme enerjisi özdeğerleri için çok önemlidir. Kratzer potansiyeli için,  $\beta$  sıfıra gittiğinde, internükleer itme sebebi ile  $\beta$  sıfır gittiğinde,  $V(\beta)$  sonsuza gider, yani molekül ayrışır (Bayrak, 2007).



**Şekil 5:** Farklı iki atomlu moleküller için Kratzer potansiyelinin şekli ( $r=\beta$ ) (Bekdemir, 2006)



## 2. MATERYAL VE YÖNTEM

### 2.1. Nikiforov-Uvarov Yöntemi

#### 2.1.1. Standart Nikiforov-Uvarov Yöntemi

Nikiforov-Uvarov (NU) yöntemi özel ortogonal fonksiyonlar vasıtasıyla hipergeometrik tip ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerine dayanmaktadır (Szego, 1959). Belirli türden potansiyeller için göreceli olmayan Schrödinger denkleminin tam bir çözümünü sağlamaktadır. Verilen bir potansiyel için, küresel koordinatlarda Schrödinger denklemi veya göreceli olmayan Schrödinger denklemine uygun bir koordinat dönüşümü  $s = s(r)$  ile birlikte genelleştirilmiş hipergeometrik bir denkleme indirgenir. Ana denklem aşağıdaki gibi yazılır (Nikiforov ve Uvarov, 1988).

$$\psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s) = 0 \quad (36)$$

burada  $\sigma(s)$  ve  $\tilde{\sigma}(s)$  ikinci dereceden polinomlardır,  $\tilde{\tau}(s)$  birinci dereceden polinomdur ve  $\psi(s)$  hipergeometrik tipte bir fonksiyondur.

Eşitlik 36.'nın özel çözümünü bulmak için  $\psi(s) = \phi(s)y(s)$  dönüşümü kullanılarak aşağıdaki gibi hipergeometrik bir denklem elde edilir.

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + \zeta y(s) = 0 \quad (37)$$

burada;

$$\sigma(s) = \pi(s) \frac{\phi(s)}{\phi'(s)} \quad (38)$$

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad (39)$$

olarak verilir.  $\tau(s)$ 'nin türevi negatif olmalıdır.  $\zeta$  sabit bir parametresi ve  $\pi$  fonksiyonu aşağıdaki denklemlerde görüldüğü gibi tanımlanır.

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s)} \quad (40)$$

$$k = \zeta - \pi'(s) \quad (41)$$

$\pi(s)$  en fazla birinci dereceden bir polinom olmalıdır, Eşitlik 40.'da karekök işareti altındaki ifade birinci dereceden bir polinomun karesi olacak şekilde düzenlenebilir. Bu sadece diskriminantı sıfır ise mümkündür. Bu durumda  $k$  için bir denklem elde edilir. Bu denklemin çözümünden sonra elde edilen  $k$  değerleri Eşitlik 41.'de yerine yazılırsa  $\zeta$  değeri bulunur. Schrödinger denklemi için enerji özdeğer denklemi

$$\zeta = \zeta_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s), \quad n = 0,1,2, \dots \quad (42)$$

bulunur. Eşitlik 41. ve Eşitlik 42. karşılaştırılırsa enerji özdeğerleri elde edilir.

Hipergeometrik tipte bir fonksiyon olan  $y(s)$  'nin tüm çözümleri Rodrigues bağıntısı ile verilir.

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s)\rho(s)] \quad (43)$$

$B_n$ , normalleştirme sabitidir ve  $\rho(s)$  ağırlık fonksiyonudur (Bekdemir, 2012).

### 2.1.2. Parametrik Standart Nikiforov-Uvarov Yöntemi

Aşağıdaki denklem, farklı potansiyeller ile elde edilebilen Schrödinger denkleminin genel bir şeklidir.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + \frac{c_1 - c_2 s}{s(1 - c_3 s)} \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{[s(1 - c_3 s)]^2} \phi = 0 \quad (44)$$

Bunu aşağıdaki gibi çözebiliriz. Eşitlik 44.'ü, Eşitlik 36. ile karşılaştırdığımızda

$$\begin{aligned}\tilde{\tau} &= c_1 - c_1 s, & \sigma &= s(1 - c_3 s), & \tilde{\sigma} \\ & & &= -\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3\end{aligned}\quad (45)$$

elde edilir. Bunları Eşitlik 40.'da yerine konursa

$$\pi = c_4 + c_5 s \pm \sqrt{(c_6 - kc_3)s^2 + (c_7 + k)s + c_8} \quad (46)$$

Burada;

$$c_4 = \frac{1}{2}(1 - c_1) \quad (47)$$

$$c_5 = \frac{1}{2}(c_2 - 2c_3) \quad (48)$$

$$c_6 = (c_5^2 + \xi_1) \quad (49)$$

$$c_7 = (2c_4c_5 - \xi_2) \quad (50)$$

$$c_8 = (c_4^2 + \xi_3) \quad (51)$$

Eşitlik 46.'da karekök altındaki fonksiyonun Nikiforov-Uvarov yöntemine göre bir polinomun karesi olmalıdır.

$$k_{1,2} = -(c_7 + 2c_3c_8) \pm \sqrt{c_8c_9} \quad (52)$$

burada;

$$c_9 = (c_3c_7 + c_3^2c_8 + c_6) \quad (53)$$

tanımlarız. Her  $k$  değeri için aşağıdaki  $\pi$ 'ler elde edilmiştir.

$$k = -(c_7 + 2c_3c_8) - \sqrt{c_8c_9} \quad (54)$$

$$\pi = c_4 + c_5 s - [(\sqrt{c_9} + c_3 \sqrt{c_8})s - \sqrt{c_8}] \quad (55)$$

olur. Aynı  $k$  için, Eşitlik 39., Eşitlik 45. ve Eşitlik 46.

$$\tau = c_1 + 2c_4 - (c_2 - 2c_5)s - 2[(\sqrt{c_9} + c_3 \sqrt{c_8})s - \sqrt{c_8}] \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \tau' &= -(c_2 - 2c_5) - 2(\sqrt{c_9} + c_3 \sqrt{c_8}) \\ &= -2c_3 - 2(\sqrt{c_9} + c_3 \sqrt{c_8}) < 0 \end{aligned} \quad (57)$$

elde edilir. Eşitlik 41.'de Eşitlik 56. ve Eşitlik 57. kullanıldığında Eşitlik 58. elde edilir.

$$\begin{aligned} c_2 n - (2n + 1)c_5 + (2n + 1)(\sqrt{c_9} + c_3 \sqrt{c_8}) + n(n - 1)c_3 \\ + c_7 + 2c_3 c_8 + 2\sqrt{c_8 c_9} = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

Eşitlik 58., belirli bir problemin enerji spektrumunu verir.

$$\rho(s) = s^{c_{10}-1} (1 - c_3 s)^{\frac{c_{11}}{c_3} - c_{10}-1} \quad (59)$$

Eşitlik 59.' da, Eşitlik 43. kullanıldığında;

$$y_n = P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1)} (1 - 2\alpha_3 s) \quad (60)$$

elde edilir ve burada;

$$c_{10} = (c_1 + 2c_4 + 2\sqrt{c_8}) \quad (61)$$

$$c_{11} = [c_2 - 2c_5 + 2(\sqrt{c_9} + c_3 \sqrt{c_8})] \quad (62)$$

ve  $P_n^{(\alpha, \beta)}$  Jacobi polinomlarıdır. Eşitlik 38. kullanıldığında

$$\emptyset(s) = s^{c_{12}}(1 - c_3s)^{-c_{12} - \frac{c_{13}}{c_3}} \quad (63)$$

elde edilir ve genel çözüm;

$$\psi = \phi(s)y(s) \quad (64)$$

$$\psi = s^{c_{12}}(1 - c_3s)^{-c_{12} - \frac{c_{13}}{c_3}} P_n^{(c_{10}-1, \frac{c_{11}}{c_3} - c_{10}-1)}(1 - 2c_3s) \quad (65)$$

burada  $c$  fonksiyonları;

$$c_{12} = (c_4 + \sqrt{c_8}) \quad (66)$$

$$c_{13} = [c_5 - (\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8})] \quad (67)$$

Bazı problemlerde  $c_3 = 0$  alınır. Bu tip sorunlar için;

$$\lim_{c_3 \rightarrow 0} P_n^{(c_{10}-1, \frac{c_{11}}{c_3} - c_{10}-1)}(1 - c_3s) = L_n^{c_{10}-1}(c_{11}s) \quad (68)$$

$$\lim_{c_3 \rightarrow 0} (1 - c_3s)^{-c_{12} - \frac{c_{13}}{c_3}} = e^{c_{13}s} \quad (69)$$

Eşitlik 65.'de verilen dalga denkleminin çözümü aşağıdaki gibi olur (Tezcan ve Sever, 2009).

$$\psi = s^{c_{12}} e^{c_{13}s} L_n^{(c_{10}-1)}(c_{11}s) \quad (70)$$

## 2.2. Z(4) Kritik Nokta Simetrisi $\gamma = 30^\circ$ için Kratzer Potansiyelinin Uygulanması

Nikiforov-Uvarov metodu kullanılarak Bohr Hamiltonyenin  $\gamma = 30^\circ$  durumu için Kratzer potansiyeli kullanılarak bir analitik çözümü elde edildi. Bu model Z(4) Kratzer olarak isimlendirilecektir. Z(4) için Bohr Hamiltonyen

denklemini Eşitlik 25.'teki gibi alırsa diferansiyel denklemin analitik çözümü Kratzer potansiyeli için elde edildi. Laguerre polinomları denklemin özfonksiyonlarıdır.

Eşitlik 26.'da,  $\lambda$  değerini yani Eşitlik 30.'u yerine yazarsak  $\beta$ 'ya bağlı kısım aşağıdaki gibi olur.

$$\left[ \frac{1}{\beta^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^3 \frac{\partial}{\partial \beta} + (\varepsilon - u(\beta)) - \frac{L}{\beta^2} (L + 1) + \frac{3}{4\beta^2} \alpha^2 \right] \phi(\beta) = 0 \quad (71)$$

Kratzer Potansiyeli,

$$u(\beta) = -\frac{A}{\beta} + \frac{B}{\beta^2} \quad (72)$$

olarak alırız. Burada;  $A = 2D_e\beta_0$  ve  $B = D_e\beta_0^2$  'dir. Kratzer potansiyelini Eşitlik 71.'de yerine yazılır ve düzenlenir ise,

$$\frac{\partial^2 \phi(\beta)}{\partial \beta^2} + \frac{3}{\beta} \frac{\partial \phi(\beta)}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \left( \varepsilon \beta^2 + A\beta + \frac{3}{4} \alpha^2 - L(L + 1) - B \right) \phi(\beta) = 0 \quad (73)$$

ifadesi elde edilir. Burada sabit terimlere  $\zeta = \frac{3}{4} \alpha^2 - L(L + 1) - B$  diyelim. Eşitlik 73.'e  $\beta = s$  dönüşümü yapılırsa parametrik Nikiforov-Uvarov metodu formunda Eşitlik 74. elde edilir.

$$\frac{\partial^2 \phi(\beta)}{\partial s^2} + \frac{3}{s} \frac{\partial \phi(\beta)}{\partial s} + \frac{1}{s^2} (\varepsilon s^2 + As + \zeta) \phi(\beta) = 0 \quad (74)$$

Eşitlik 74.'e parametrik Nikiforov-Uvarov metodunu uygulayalım. Eşitlik 44. ve Eşitlik 74. karşılaştırsak;

$$\xi_1 = -\varepsilon, \quad \xi_2 = A, \quad \xi_3 = -\zeta, \quad c_1 = 3, \quad c_2 = 0, \quad (75)$$

$$\begin{aligned}
 c_3 &= 0, & c_4 &= -1, & c_5 &= 0, & c_6 &= -\varepsilon, \\
 & & c_7 &= -A, & & & & \\
 c_8 &= 1 - \zeta, & c_9 &= -\varepsilon, & c_{10} &= 1 + 2\sqrt{1 - \zeta}, \\
 c_{11} &= 2\sqrt{-\varepsilon}, & c_{12} &= \sqrt{1 - \zeta} - 1, & c_{13} &= -\sqrt{-\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

değerlerini elde ederiz. Bu değerleri Eşitlik 58.'de yerine yazılırsa;

$$(2n + 1)(\sqrt{-\varepsilon}) + 2\sqrt{-\varepsilon.(1 - \zeta)} = A \quad (76)$$

ifadesi elde edilir. Her iki tarafın karesini alınıp düzenlenirse;

$$\varepsilon = \frac{-A^2}{[(2n + 1) + 2\sqrt{(1 - \zeta)}]^2} \quad (77)$$

enerji spektrumunu elde ederiz.  $\varepsilon = (2B_m/\hbar^2)E$  ve  $\zeta = \frac{3}{4}\alpha^2 - L(L + 1) - B$  ifadelerini Eşitlik 77.'de yerine yazılır ise enerji denklemini elde ederiz.

$$E_{n,L} = \frac{-\hbar^2 A^2}{2B_m \left[ (2n + 1) + 2\sqrt{\left(1 - \frac{3}{4}\alpha^2 + L(L + 1) + B\right)} \right]^2} \quad (78)$$

Eşitlik 78.'de  $A$  ifadesi numerik hesaplamalarda Fortunato (2005)'ya göre,  $A=20$  alındı.  $n$  osilatör kuantum sayısıdır.  $\alpha$  yerine Wobbling kuantum sayısı  $n_w=L-\alpha$  (Meyer-ter-Vehn, 1975) kullanmak daha uygundur. Burada  $n_w=0$  temel seviye bandına karşılık gelirken  $L= n_w, n_w+2, n_w+4, \dots (n_w>0)$  bir dizi uyarılmış enerji bandlarını ifade eder. Eşitlik 78.'de  $\alpha=L-n_w$  alırsak enerji denklemi Eşitlik 79. ile ifade edilir.

$$E_{n,L} = \frac{-\hbar^2 A^2}{2B_m \left[ 1 + 2\sqrt{\left(\frac{L(L+4)+3n_w(2L-n_w)+4}{4} + B\right)} \right]^2} \quad (79)$$

Eşitlik 75.'de, bulunan değerleri Eşitlik 70.'de yerine yazılırsa dalga fonksiyonunu elde ederiz.

$$\psi(s) = s^{\sqrt{1-\zeta}-1} e^{-s\sqrt{-\varepsilon}} L_n^{2\sqrt{1-\zeta}}(2s\sqrt{-\varepsilon}) \quad (80)$$

Eşitlik 81. 'a,  $s = \beta$  dönüşümü yapılırsa dalga fonksiyonu;

$$\psi_{n,L}(\beta) = C_N \beta^{\sqrt{1-\zeta}-1} e^{-\beta\sqrt{-\varepsilon}} L_n^{2\sqrt{1-\zeta}}(2\beta\sqrt{-\varepsilon}) \quad (81)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $C_N$ , normalleştirme katsayısı ve  $L_n$ , Laguerre polinomlarıdır.  $C_N$  normalizasyon denklemi  $C_N^2 \int_0^\infty \psi^2(\beta) \beta^3 d\beta = 1$  ile elde edilir. Normalizasyon denkleminde, Eşitlik 82. yerine konulursa normalleştirme katsayısı aşağıdaki gibi bulunur.

$$C_N^2 \int_0^\infty \beta^{2+2\sqrt{1-\zeta}} e^{-2\beta\sqrt{-\varepsilon}} L_n^{2\sqrt{1-\zeta}}(2\beta\sqrt{-\varepsilon}) L_n^{2\sqrt{1-\zeta}}(2\beta\sqrt{-\varepsilon}) \beta^3 d\beta = 1 \quad (82)$$

$2\beta\sqrt{-\varepsilon} = s$  ve  $2\sqrt{1-\zeta} = \alpha$  ifadeleri kullanılırsa Eşitlik 83. aşağıdaki gibi elde edilir.

$$C_N^2 \left( \frac{1}{2\sqrt{-\varepsilon}} \right)^{2+\alpha} \int_0^\infty s^{1+\alpha} e^{-s} L_n^\alpha(s) L_n^\alpha(s) ds = 1 \quad (83)$$

Laguerre polinomu;

$$\int_0^\infty x^{1+k} e^{-x} L_n^k(x) L_n^k(x) dx = \frac{(n+k)!}{n!} (2n+k+1) \quad (84)$$



çözümünü verir (Arfken, 1985). Eşitlik 84.'deki integralin çözümü;

$$\int_0^{\infty} s^{1+\alpha} e^{-s} L_n^{\alpha}(s) L_n^{\alpha}(s) ds = \frac{(n+\alpha)!}{n!} (2n+\alpha+1) \quad (85)$$

biçiminde olur. Burada  $C_N$  normalleştirme katsıyı aşağıdaki gibi elde ederiz

$$C_N = (2\sqrt{-\varepsilon})^{\alpha+2} \sqrt{\frac{n!}{(n+\alpha)!} \frac{1}{(2n+\alpha+1)}} \quad (86)$$

Eşitlik 86.'ü dalga fonksiyonunda yerine koyduğumuzda, Z(4) Kratzer potansiyeli için dalga fonksiyonu Eşitlik 88. ile ifade edilir.

$$\begin{aligned} & \psi_{n,L}(\beta) \\ &= (2\sqrt{-\varepsilon})^{\alpha+2} \sqrt{\frac{n!}{(n+\alpha)!} \frac{1}{(2n+\alpha+1)}} \beta^{-1+\sqrt{1+\zeta}} e^{-\beta\sqrt{-\varepsilon}} L_n^{2\sqrt{1+\zeta}} \end{aligned} \quad (87)$$

burada  $\alpha = 2\sqrt{1 - \frac{3}{4}\alpha^2 + L(L+1) + B}$  ve  $\zeta = \frac{3}{4}\alpha^2 - L(L+1) - B$  olduğunu unutmayalım.

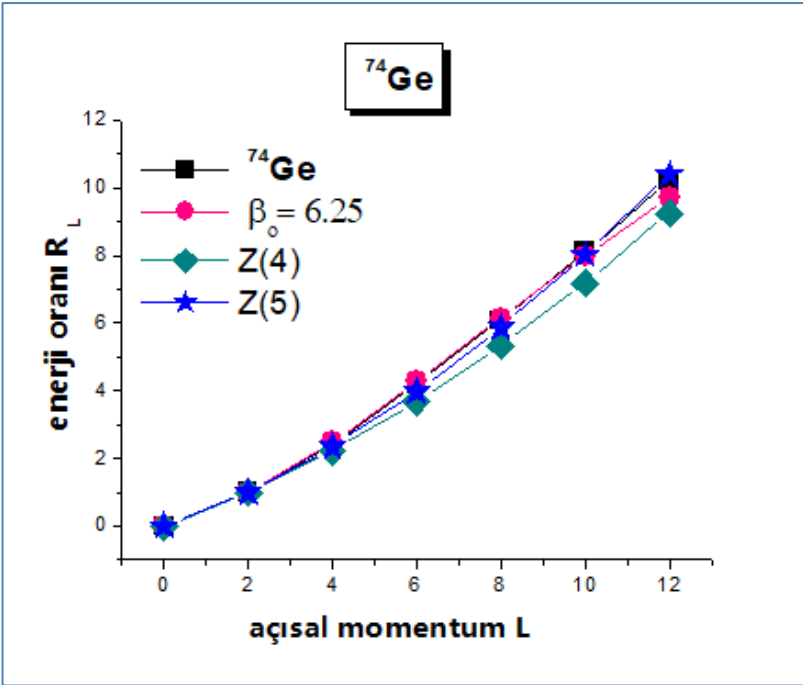
### 3. BULGULAR

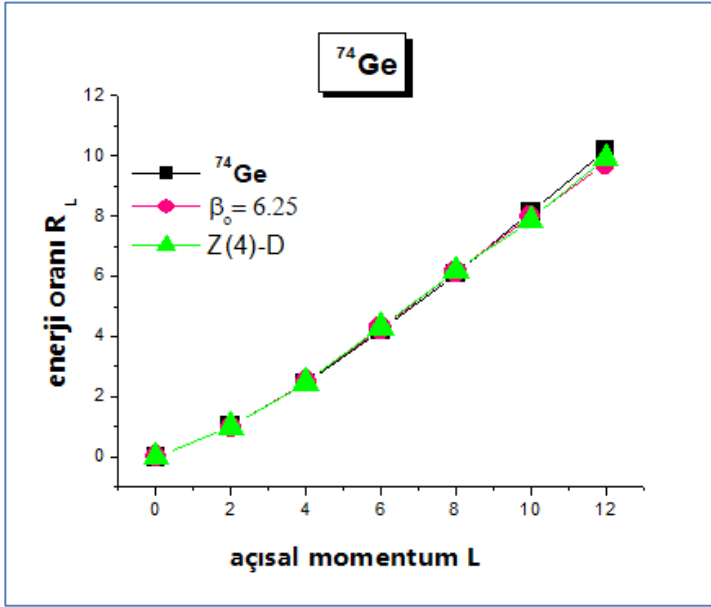
**Tablo 2:** Farklı  $\beta_0$  değerleri, Z(4)-K modelinin gsb için  $R_{n,L}$  enerji oranları Z(4) model, Z(5) model, Z(4)-D model ve katı üç eksenli rotor model (RTR) sonuçları

gsb	$\beta_0$ $L_{s,n_w}$	0	2	8	$\infty$	Z(4)-D $\infty$	Z(4)	Z(5)	RTR
	$0_{1,0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$2_{1,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1
	$4_{1,0}$	1.28	2.230	2.520	2.667	2.667	2.226	2.350	2.667
	$6_{1,0}$	1.39	3.420	4.400	5.000	5.000	3.669	3.984	5.00
	$8_{1,0}$	1.45	4.420	6.450	8.000	8.000	5.324	5.877	8.000
	$10_{1,0}$	1.48	5.230	8.540	11.667	11.667	7.188	8.019	11.667
$\gamma$ -bandı	$\beta_0$ $L_{s,n_w}$	0	2	8	$\infty$	Z(4)-D $\infty$	Z(4)	Z(5)	RTR
	$2_{1,2}$	1.21	1.79	1.93	2,000	2.000	1.766	1.837	2.000
	$3_{1,1}$	1.30	2.43	2.81	3,000	3.000	2.445	2.597	3.000
	$4_{1,2}$	1.41	3.68	4.89	5,667	5.667	4.051	4.420	5.667
	$5_{1,1}$	1.41	3.80	5.12	6,000	6.000	4.239	4.634	6.000
	$6_{1,2}$	1.47	4.90	7.64	10,000	10.000	6.357	7.063	10.000
	$7_{1,1}$	1.46	4.83	7.45	9,667	9.667	6.188	6.869	9.667
	$8_{1,2}$	1.50	5.74	10.14	15,000	15.000	8.788	9.864	15.000
	$9_{1,1}$	1.49	5.60	9.69	14,000	14.000	8.316	9.318	14.000
	$10_{1,2}$	1.51	6.33	12.35	20,667	20.667	11.378	12.852	20.667
	$11_{1,1}$	1.51	6.18	11.76	19	19.000	10.630	11.989	19.000
	$0_{2,1}$	1.00	2.65	5.35			2.954	3.913	
	$2_{2,1}$	1.28	3.24	6.10			4.804	5.697	
	$4_{2,1}$	1.39	4.00	7.23			6.893	7.962	
	$6_{2,1}$	1.45	4.75	8.65			9.215	10.567	
	$8_{2,1}$	1.48	5.42	10.21			11.765	13.469	
	$10_{2,1}$	1.50	5.98	11.82			14.538	16.646	

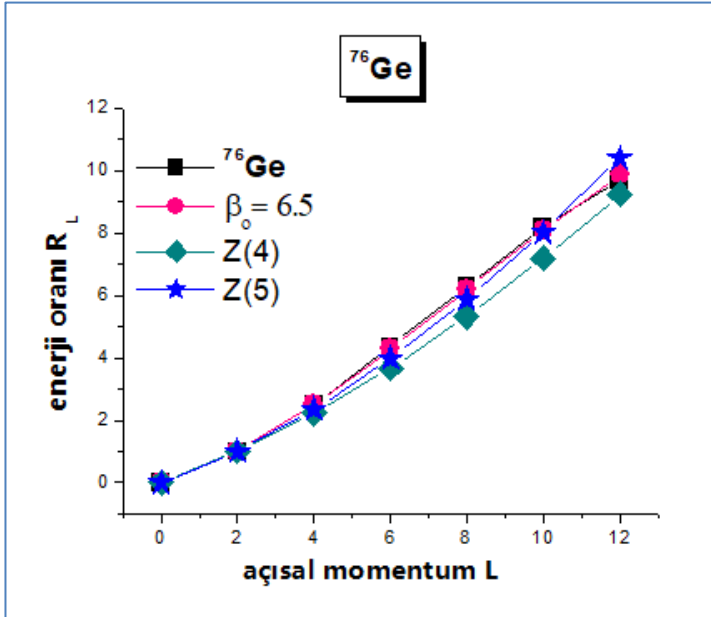
**Tablo 2:** (Devam) Farklı  $\beta_0$  değerleri, Z(4)-K modelinin gsb için  $R_{n,L}$  enerji oranları Z(4) model, Z(5) model, Z(4)-D model ve katı üç eksenli rotor model (RTR) sonuçları

$\beta_1$ - bandı	$\beta_0$ $L_{s,n_w}$	0	2	8	$\infty$	Z(4)-D $\infty$	Z(4)	Z(5)	RTR
$0_{2,1}$		1.00	2.65	5.35			2.954	3.913	
$2_{2,1}$		1.28	3.24	6.10			4.804	5.697	
$4_{2,1}$		1.39	4.00	7.23			6.893	7.962	
$6_{2,1}$		1.45	4.75	8.65			9.215	10.567	
$8_{2,1}$		1.48	5.42	10.21			11.765	13.469	
$10_{2,1}$		1.50	5.98	11.82			14.538	16.646	

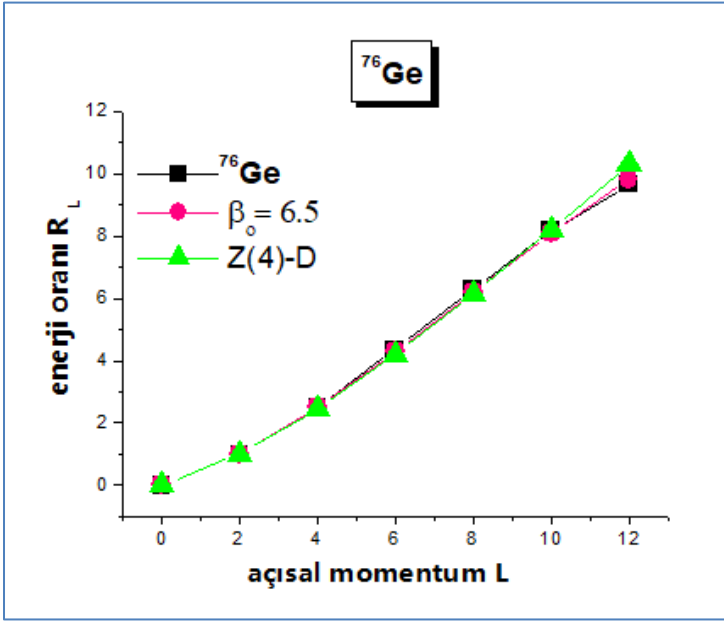
**Şekil 6:**  $^{74}\text{Ge}$  çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 6.25$ ) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



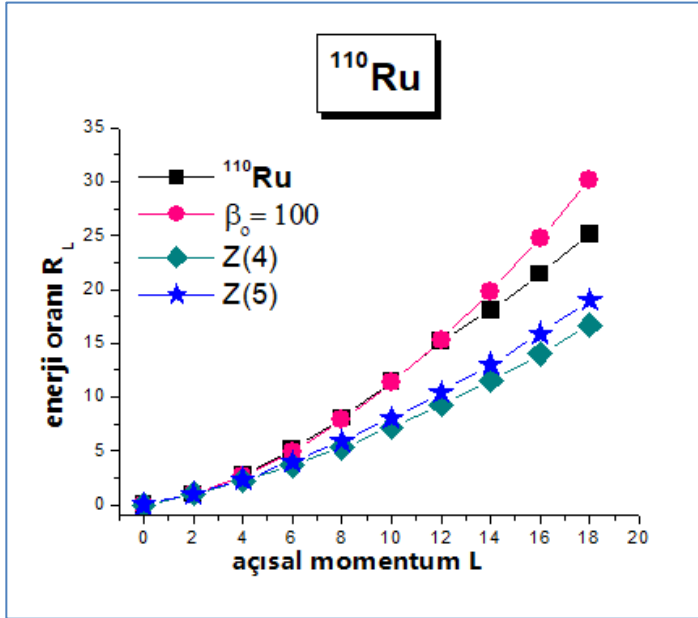
Şekil 7: <sup>74</sup>Ge çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 6.25$ ) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



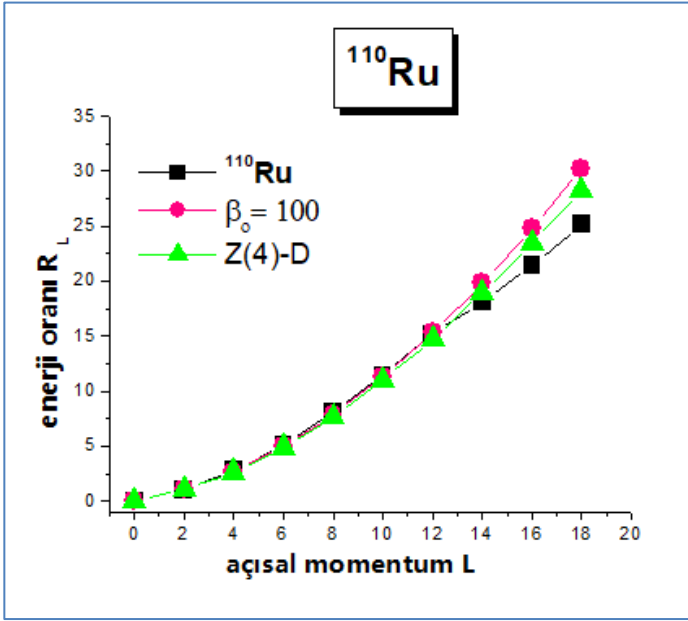
Şekil 8: <sup>76</sup>Ge çekirdeğinin mevcut deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 6.5$ ) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



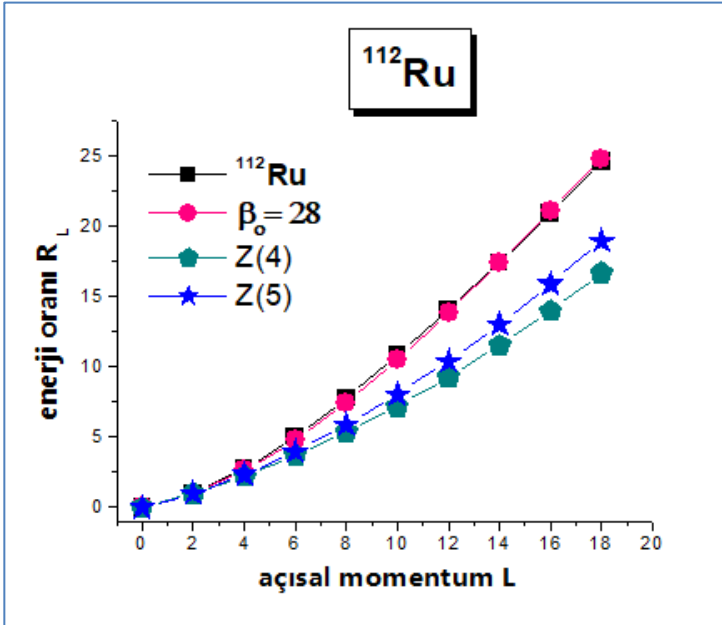
Şekil 9: <sup>76</sup>Ge çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 6.5$ ) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



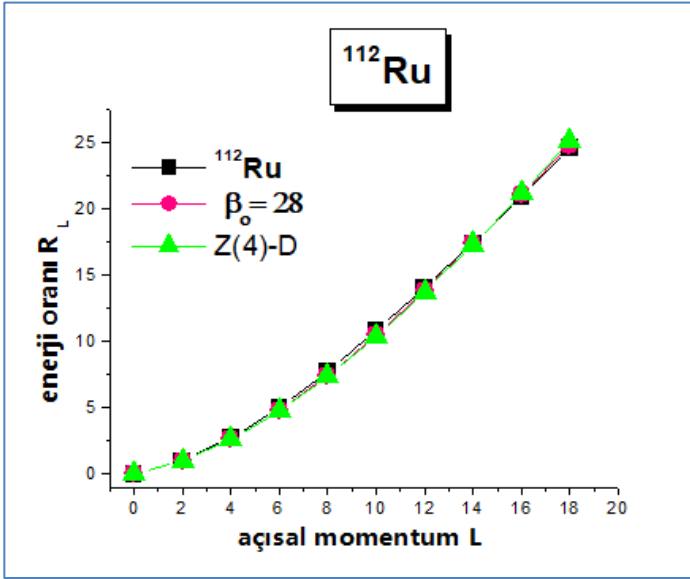
Şekil 10: <sup>110</sup>Ru çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 100$ ) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



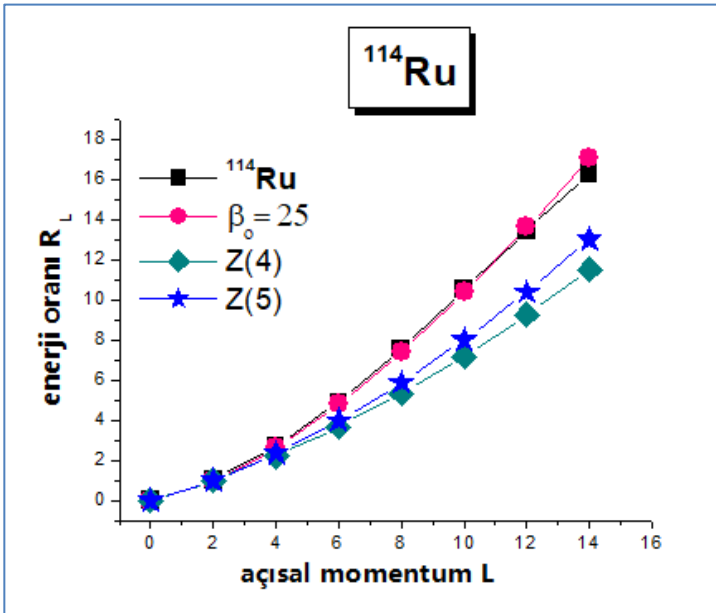
Şekil 11:  $^{110}\text{Ru}$  çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 100$ ) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



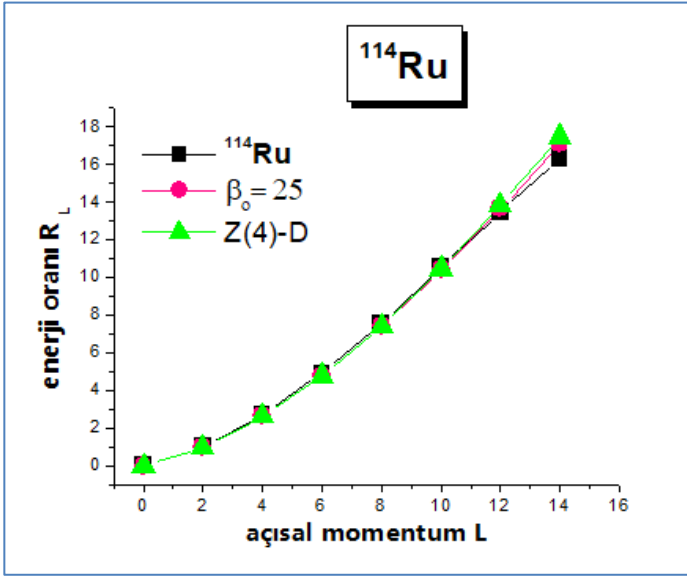
Şekil 12:  $^{112}\text{Ru}$  çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 28$ ) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



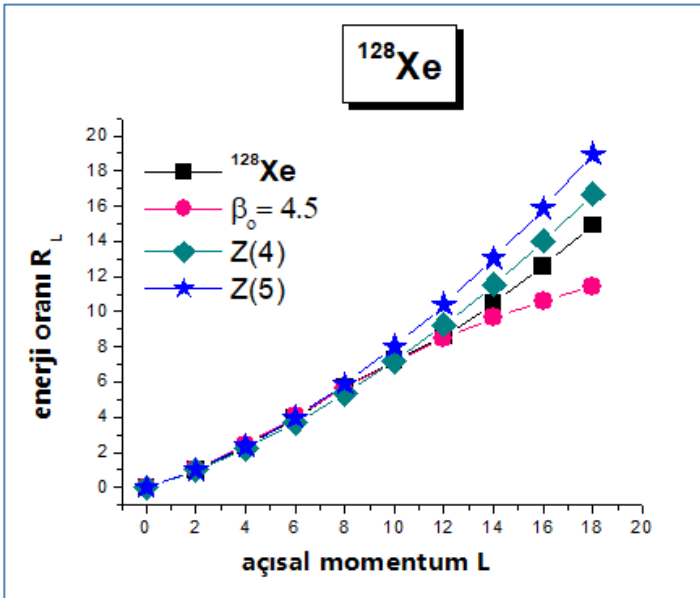
Şekil 13: <sup>112</sup>Ru çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 28$ ) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



Şekil 14: <sup>114</sup>Ru çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 25$ ) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması

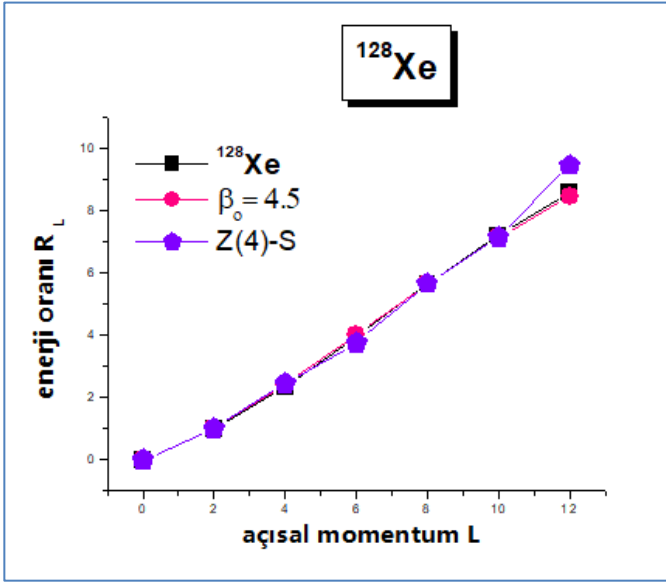


Şekil 15:  $^{114}\text{Ru}$  çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 25$ ) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması

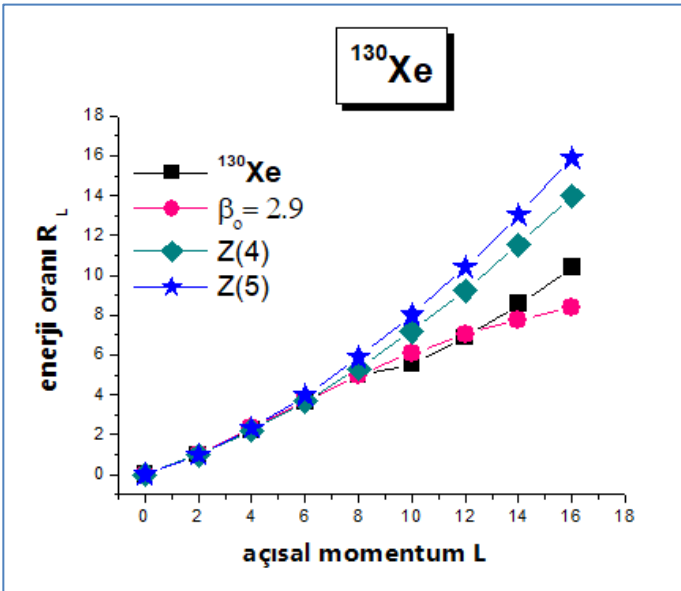


Şekil 16:  $^{128}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 4.5$ ) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması

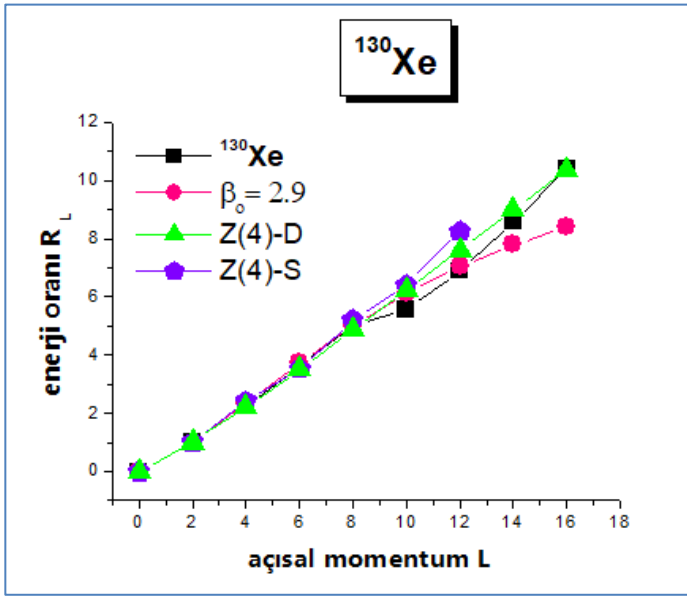




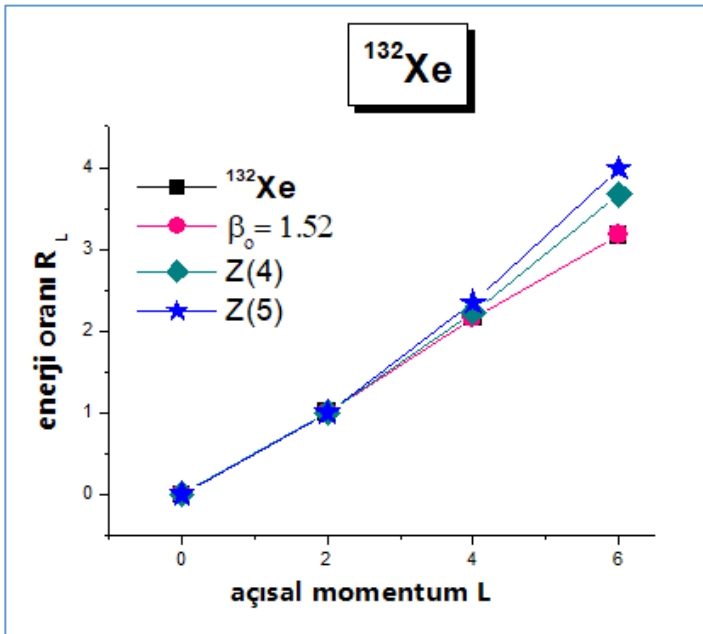
Şekil 17:  $^{128}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 4.5$ ) model ile Z(4)-D modelinin temel durum bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



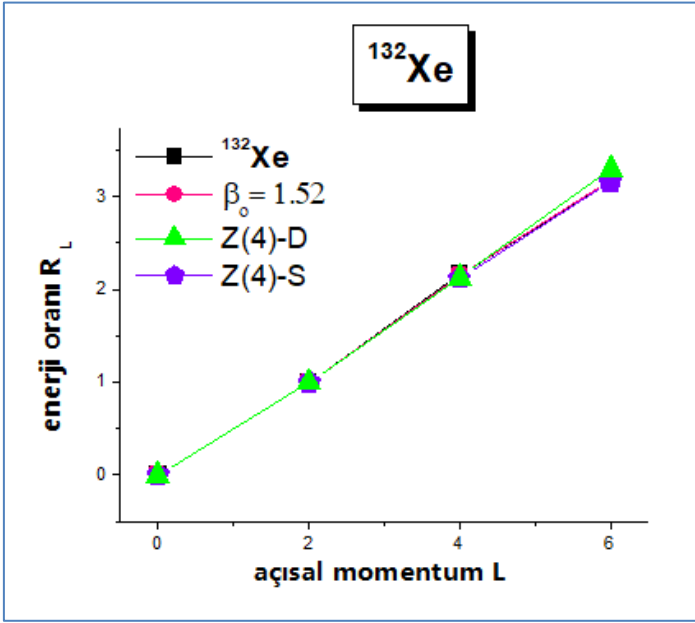
Şekil 18:  $^{130}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 2.9$ ) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



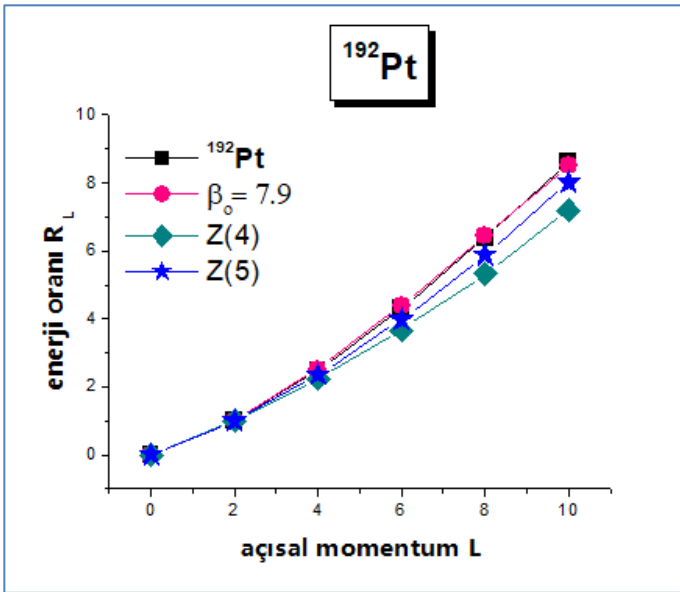
Şekil 19:  $^{130}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 2.9$ ) model ile Z(4)-D, Z(4)-S modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



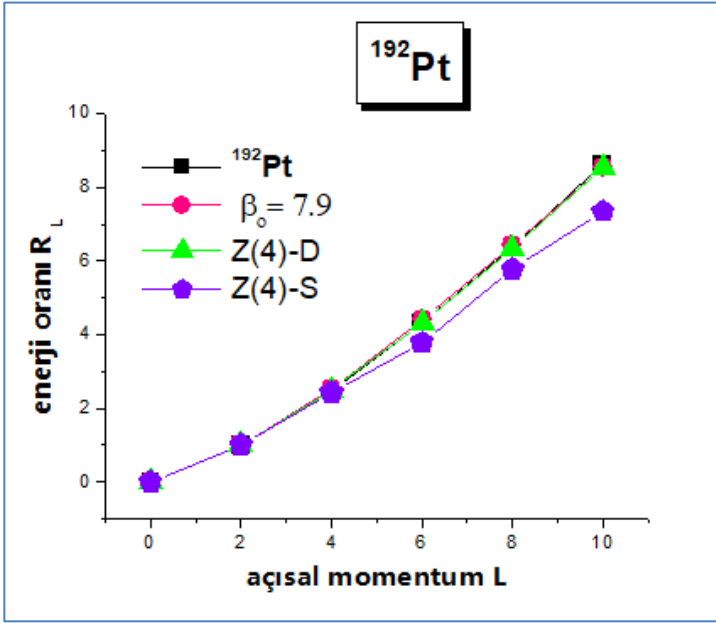
Şekil 20:  $^{132}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 1.52$ ) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



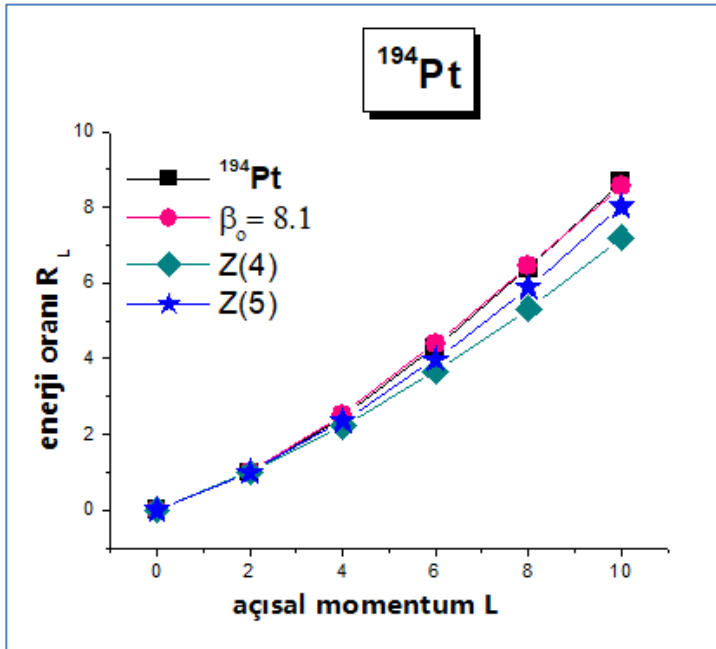
Şekil 21:  $^{132}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 1.52$ ) model ile Z(4)-D, Z(4)-S modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



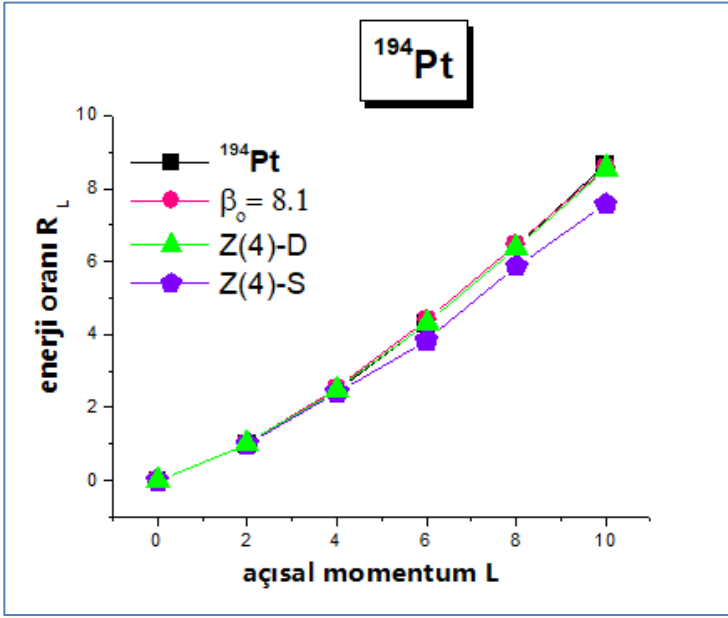
Şekil 22: Z(4)-K ( $\beta_0 = 7.9$ ) modeli,  $^{192}\text{Pt}$  çekirdeğinin deneysel verileri ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



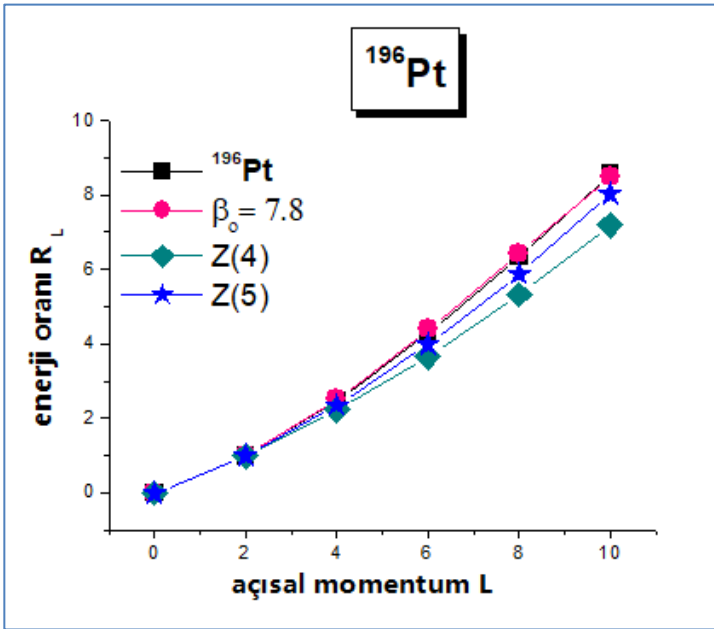
Şekil 23: <sup>192</sup>Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 7.9$ ) model ile Z(4)-D, Z(4)-S modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



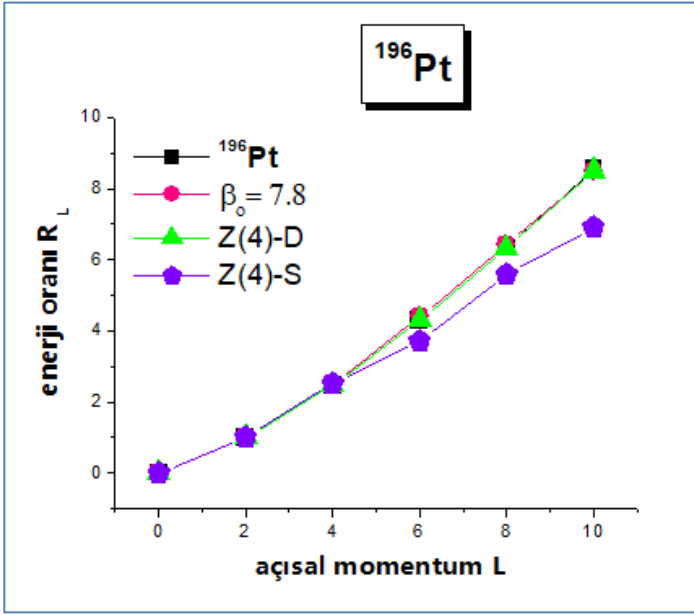
Şekil 24: <sup>194</sup>Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 8.1$ ) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



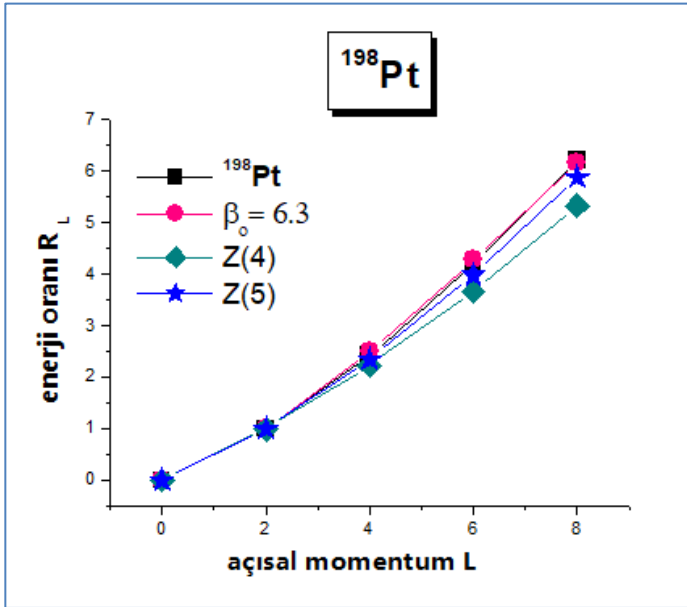
Şekil 25: <sup>194</sup>Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 8.1$ ) model ile Z(4)-D, Z(4)-S modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



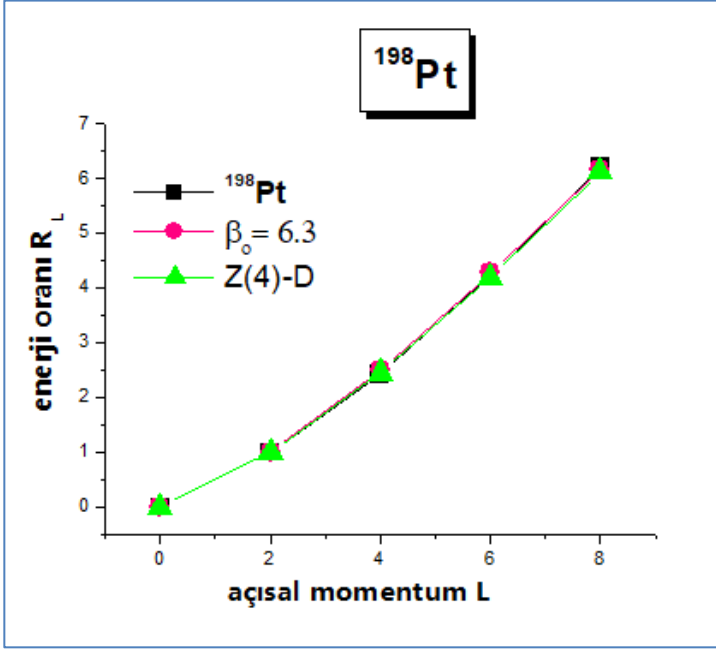
Şekil 26: <sup>196</sup>Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 7.8$ ) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



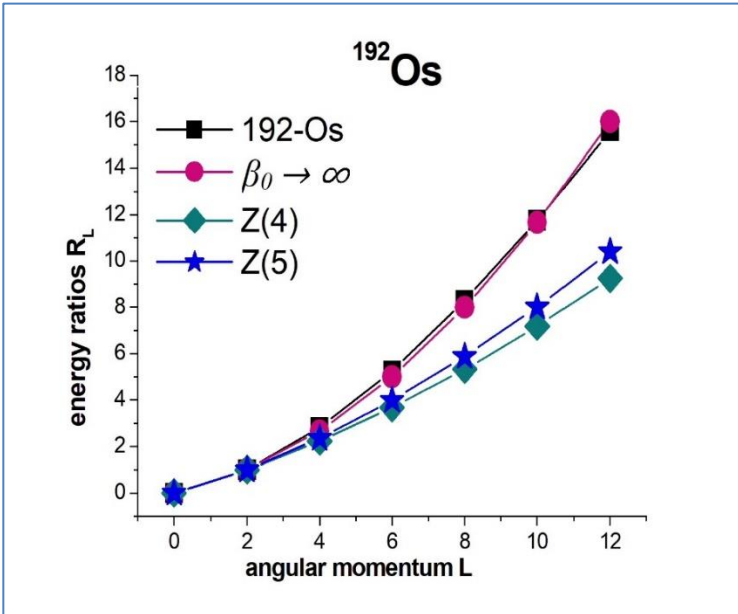
Şekil 27:  $^{196}\text{Pt}$  çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 7.8$ ) model ile Z(4)-D, Z(4)-S modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



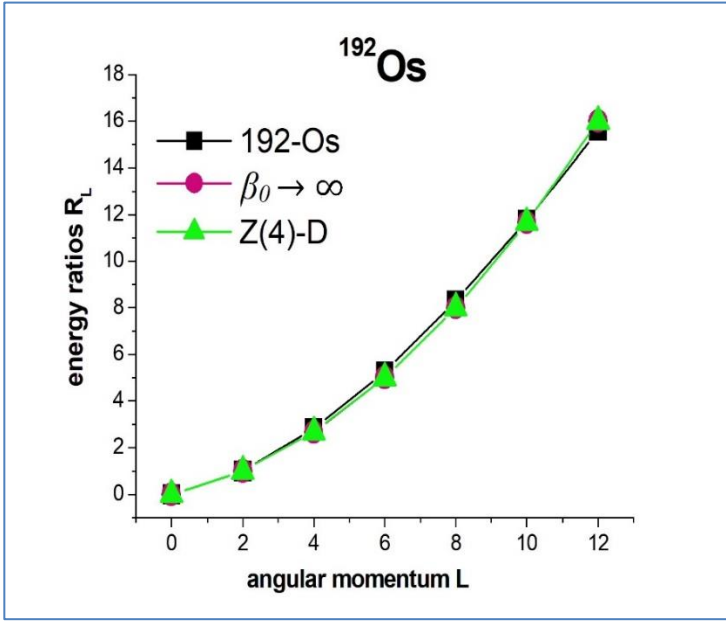
Şekil 28:  $^{198}\text{Pt}$  çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 6.3$ ) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



Şekil 29: <sup>198</sup>Pt çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 = 6.3$ ) model ile Z(4)-D modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



Şekil 30: <sup>192</sup>Os çekirdeğinin deneysel verileri, Z(4)-K ( $\beta_0 \rightarrow \infty$ ) model ile Z(4), Z(5) modelleri için temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



**Şekil 31:**  $^{192}\text{Os}$  çekirdeğinin deneysel verileri ile  $Z(4)\text{-K}$  ( $\beta_0 \rightarrow \infty$ ) modeli ve  $Z(4)\text{-D}$  modelinin temel seviye bandlarına ait enerji seviyelerinin karşılaştırılması



**Tablo 3:** Uygun  $\beta_0$  değerleri için Z(4)-K modelinin teorik tahminleri,  $^{74,76}\text{Ge}$ ,  $^{110-114}\text{Ru}$ ,  $^{128-132}\text{Xe}$ ,  $^{192-198}\text{Pt}$ ,  $^{192}\text{Os}$  deneysel verileri ve Z-(4) modelin  $\gamma$  bandı enerji değerleri

$\beta_0$	$^{74}\text{Ge}$ Veri	$^{74}\text{Ge}$ $\beta_0 = 6.25$	$^{76}\text{Ge}$ Veri	$^{76}\text{Ge}$ $\beta_0 = 6.5$	$^{110}\text{Ru}$ Veri	$^{110}\text{Ru}$ $\beta_0 = 100$	$^{112}\text{Ru}$ Veri	$^{112}\text{Ru}$ $\beta_0 = 28$	$^{114}\text{Ru}$ Veri	$^{114}\text{Ru}$ $\beta_0 = 25$	$^{128}\text{Xe}$ Veri	$^{128}\text{Xe}$ $\beta_0 = 4.5$	Z(4)
2 <sub>1,2</sub>	2,02	1,917	1,969	1,920	2,5458	1,994	2,212	1,979	2,124	1,978	2,188	1,890	1,766
3 <sub>1,1</sub>	2,848	2,762	2,734	2,769	3,5723	2,982	3,158	2,939	3,124	2,933	3,227	2,688	2,445
4 <sub>1,2</sub>	3,633	4,717	3,591	4,745	4,5045	5,590	4,143	5,406	4,079	5,378	3,620	4,458	4,051
5 <sub>1,1</sub>	4,526	4,936	4,417	4,967	5,7135	5,913	5,219	5,705	5,175	5,674	4,508	4,650	4,239
6 <sub>1,2</sub>	5,564	7,206	5,389	7,278	6,9965	9,741	6,634	9,149	6,642	9,061	5,149	6,570	6,357
7 <sub>1,1</sub>	6,394	7,039	6,276	7,107	8,3948	9,426	7,779	8,872	7,757	8,790	6,165	6,433	6,188
8 <sub>1,2</sub>		9,361	7,336	9,486	9,9572	14,404	9,563	13,104		12,917	6,715	8,283	8,788
9 <sub>1,1</sub>		8,977	8,077	9,092	11,5353	13,482	10,707	12,342	10,68	12,177		7,986	8,316
10 <sub>1,2</sub>		11,198		11,382	13,518	19,532	12,812	17,176		16,849		9,667	11,378
11 <sub>1,1</sub>		10,710		10,877	15,0671	18,041	13,902	16,020		15,737		9,306	10,63

**Tablo 3:** (Devamı) Uygun  $\beta_0$  değerleri için Z (4) -K modelinin teorik tahminleri,  $^{74,76}\text{Ge}$ ,  $^{110-114}\text{Ru}$ ,  $^{128-132}\text{Xe}$ ,  $^{192-198}\text{Pt}$ ,  $^{192}\text{Os}$  deneysel verileri ve Z-(4) modelin  $\gamma$  bandı enerjisi değerleri

$\beta_0$	$^{130}\text{Xe}$ Veri	$^{130}\text{Xe}$ $\beta_0 = 2.9$	$^{132}\text{Xe}$ Veri	$^{132}\text{Xe}$ $\beta_0 = 1.5;$	$^{192}\text{Pt}$ Veri	$^{192}\text{Pt}$ $\beta_0 = 7.9$	$^{194}\text{Pt}$ Veri	$^{194}\text{Pt}$ $\beta_0 = 8.1$	$^{196}\text{Pt}$ Veri	$^{196}\text{Pt}$ $\beta_0 = 7.8$	$^{192}\text{Os}$ Veri	$^{192}\text{Os}$ $\beta_0 \rightarrow \infty$	Z(4)
$2_{1,2}$	2,093	1,843	1,944	1,748	1,935	1,933	1,894	1,934	1,936	1,932	2,376	2,000	1,766
$3_{1,1}$	3,046	2,562	2,701	2,329	2,910	2,805	2,809	2,809	2,854	2,803	3,355	3,000	2,445
$4_{1,2}$	3,374	4,054	2,940	3,392	3,795	4,876	3,743	4,892	3,636	4,869	4,42	5,667	4,051
$5_{1,1}$	4,051	4,207	3,246	3,492	4,682	5,112	4,563	5,129	4,526	5,105	5,557	6,000	4,239
$6_{1,2}$		5,664	3,450	4,370	5,905	7,620		7,662	5,644	7,601	7,12	10,000	6,357
$7_{1,1}$		5,564		4,313	6,677	7,431		7,471		7,413	8,323	9,667	6,188
$8_{1,2}$		6,853		5,001	8,186	10,098		10,175		10,062	10,369	15,000	8,788
$9_{1,1}$		6,653		4,900		9,650		9,719		9,617		14,000	8,316
$10_{1,2}$		7,748		5,434		12,292		12,407		12,237	14,064	20,667	11,378
$11_{1,1}$		7,520		5,327		11,701		11,806		11,652		19,000	10,63

**Tablo 4:** Uygun  $\beta_0$  değerleri için  $Z(4)$ -K modelinin teorik tahminleri ve  $Z_1(4)$  modelinin  $\beta_1$  bandı enerji değerleri

$\beta_0$	$^{74}Ge$	$^{76}Ge$	$^{110}Ru$	$^{112}Ru$	$^{114}Ru$	$^{128}Xe$	$^{130}Xe$	$^{132}Xe$	$^{192}Pt$	$^{194}Pt$	$^{196}Pt$	$^{198}Pt$	$^{192}Os$
$L_{s,w}$	$\beta_0 = 6.25$	$\beta_0 = 6.5$	$\beta_0 = 100$	$\beta_0 = 28$	$\beta_0 = 25$	$\beta_0 = 4.5$	$\beta_0 = 2.9$	$\beta_0 = 1.52$	$\beta_0 = 7.9$	$\beta_0 = 8.1$	$\beta_0 = 7.8$	$\beta_0 = 6.3$	$\beta_0 \rightarrow \infty$
$0_{2,1}$	4,704	4,801	20,207	10,381	9,781	3,967	3,176	2,337	5,318	5,388	5,284	4,724	21080,9
$2_{2,1}$	5,421	5,522	21,119	11,226	10,618	4,650	3,810	2,898	6,059	6,132	6,024	5,442	21081,9
$4_{2,1}$	6,499	6,610	22,628	12,597	11,974	5,641	4,676	3,572	7,193	7,272	7,156	6,522	21083,5
$6_{2,1}$	7,800	7,929	24,716	14,444	13,791	6,786	5,606	4,204	8,600	8,689	8,557	7,827	21085,9
$8_{2,1}$	9,198	9,354	27,360	16,701	16,000	7,959	6,489	4,735	10,156	10,262	10,105	9,231	21088,9
$10_{2,1}$	10,592	10,782	30,532	19,295	18,522	9,073	7,271	5,159	11,756	11,884	11,695	10,631	21092,5
$12_{2,1}$	11,916	12,145	34,197	22,150	21,277	10,085	7,940	5,493	13,322	13,477	13,248	11,963	21096,8
$14_{2,1}$	13,133	13,405	38,318	25,191	24,189	10,979	8,501	5,755	14,803	14,988	14,715	13,190	21101,8
$16_{2,1}$	14,229	14,544	42,856	28,348	27,188	11,757	8,968	5,963	16,172	16,387	16,068	14,295	21107,5
$18_{2,1}$	15,203	15,560	47,766	31,560	30,214	12,426	9,355	6,128	17,416	17,662	17,296	15,277	21113,8

#### 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada;  $\gamma = 30^\circ$  için Bohr Hamiltonyeninin  $\beta$  kısmında Kratzer potansiyeli kullanılarak analitik tam bir çözümü türetilmiştir. Bu çözüm Z(4)-K olarak adlandırıldı. Nikiforov ve Uvarov tarafından geliştirilen analitik yöntem kullanılarak enerji özdeğerleri ve dalga fonksiyonları elde edildi. Temel seviye bandı enerjileri için farklı  $\beta_0$  değerlerinin Z(4)-K modelinden elde edilen sayısal sonuçlar  $^{74-76}\text{Ge}$ ,  $^{110-114}\text{Ru}$ ,  $^{128-132}\text{Xe}$ ,  $^{192-196}\text{Pt}$ ,  $^{192}\text{Os}$  izotoplarının mevcut deneysel verileri, Z(4), Z(5), Z(4)-S ve Z(4)-D modellerinin temel seviye band tahminleri ile karşılaştırıldı ve geliştirilen teorik modellerle uyumlu çekirdekler araştırıldı (bkz. Şekil 6-31). Enerji oran değerleri  $2_1 \rightarrow 0_1$  değerine normalize edildi.

Parametreye bağlı modellerde serbest parametre değerini değiştirerek ilgili bölgenin karakteristik yapısının nasıl değiştiğini incelemek açısından önemlidir. Bunu görebilmek için, değişken  $\beta_0$  parametresinin farklı değerlerinin gsb,  $\gamma$ -bandı ve  $\beta_1$ - bandının sayısal sonuçları Tablo 2’de Z(4)-D (Yiğitoglu ve Gokbulut, 2018), Z(4) (Bonatsos ve ark., 2005), Z(5) (Bonatsos ve ark., 2004) ve RTR model tahminleri ile birlikte verilmiştir. Tablo 2’deki  $L_{s,n_w}$  ifadesi, seviye enerjileri için kullanılır. Temel seviye bandının seviyeleri  $s = 1$ ,  $n_w = 0$  ( $n = 0$ ) ile karakterize edilirken,  $\beta_1$  - bandı  $s = 2$ ,  $n_w = 0$  ( $n = 1$ ) ile karakterize edilir.  $\gamma$ -bandı ise, çift L seviyeleri için  $s = 1$ ,  $n_w = 2$  ve tek L seviyeleri için  $s = 1$ ,  $n_w = 1$  ile karakterize edilir (Bonatsos ve ark., 2005).

Tablo 2 incelendiğinde değişken  $\beta_0$ ’ın artan değerleri için seviye enerjilerinin de arttığı görülmektedir.  $\beta_0 \rightarrow \infty$  değerinde Z(4)-K tahminleri RTR ile örtüşmektedir.  $\beta_0 = 0$  değeri kabuk model tahmini ile örtüşür.  $R_{4/2} < 2$  ise kabuk modele karşılık gelmektedir (Casten, 1990).

Şekil 6’da görüldüğü üzere,  $\beta_0 = 6.25$  değeri için Z(4)-K model tahminlerinin  $L=10$  açısız momentum değerine kadar  $^{74}\text{Ge}$  çekirdek verisi ile örtüştüğü fakat  $L=12$  açısız momentum değerinde sapma meydana geldiği görülmektedir. Z(5) model tahmini ise  $L=12$  açısız momentum değeri içinde  $^{74}\text{Ge}$  çekirdeği ile uyumludur. Bu durum Z(5) modelinin  $^{74}\text{Ge}$  çekirdeğini daha iyi açıkladığını gösterir.  $^{74}\text{Ge}$  çekirdeğinin, bir Z(5) modeli çekirdeği olduğunu söylenebilir. Şekil 7 incelendiğinde ise;  $L=12$  açısız momentum

değerine kadar deneysel veriler ile Z(4)-K modelinin daha uyumlu tahminler yaptığı fakat  $L=12$  açısız momentum değerinde Z(4)-D modelinin,  $^{74}\text{Ge}$  çekirdeği ile daha uyumlu olduğu görülmektedir.

Şekil 8’de görüldüğü gibi,  $\beta_0 = 6.5$  değeri için Z(4)-K modeli,  $^{76}\text{Ge}$  çekirdeği ile  $L=12$  açısız momentum değerine kadar enerji oranlarının örtüştüğü görülmektedir.  $L=12$  açısız momentum değerine kadar  $^{76}\text{Ge}$  çekirdeği deneysel verisi ile Z(4)-K model tahminleri Z(4)-D model tahminlerine göre daha uyumlu olduğu Şekil 9’da görülmektedir. Z(4)-D modeli  $^{74}\text{Ge}$  çekirdeğini daha iyi açıklarken Z(4)-K modeli ise  $^{76}\text{Ge}$  çekirdeğini daha iyi açıklamaktadır.

Z(4)-K modelinin  $\beta_0 = 100$  değeri için  $^{110}\text{Ru}$  çekirdeği ile  $L=12$  enerji seviyesine kadar örtüştüğü,  $L \geq 14$  enerji seviyelerinde sapma meydana geldiği Şekil 10’da görülmektedir. Şekil 11 incelendiğinde ise;  $L=12$  açısız momentum seviyesine kadar Z(4)-D modelinin, Z(4)-K modeline göre  $^{110}\text{Ru}$  çekirdeği temel seviye band yapısını daha iyi açıkladığı görülmektedir.

Şekil 12 incelendiğinde, temel seviye bandı  $L=18$  açısız momentum seviyesine kadar  $\beta_0 = 28$  değeri için Z(4)-K model tahminlerinin  $^{112}\text{Ru}$  çekirdeğinin deneysel verileri ile örtüştüğü gözlenmiştir.  $^{112}\text{Ru}$  çekirdeğinin deneysel verilerinin hem Z(4)-D modeli hem de  $\beta_0 = 28$  parametre değeri için Z(4)-K modeli ile örtüştüğü Şekil 13’de görülmektedir.

$^{114}\text{Ru}$  çekirdeğinin deneysel verileri ile  $\beta_0 = 25$  için Z(4)-K modelinin sayısal sonuçları  $L=12$  spin seviyesine kadar uyumlu olduğu Şekil 14’de gözlenmiştir. Şekil 15’deki grafik incelendiğinde  $L=12$  açısız momentum değerine kadar Z(4)-D model tahminlerinin  $^{114}\text{Ru}$  çekirdeğinin deneysel verileri ile örtüştüğü fakat  $L=14$  açısız momentum değeriyle birlikte hafif bir sapmanın başladığı gözlenmiştir.  $\beta_0 = 25$  değeri için Z(4)-K model tahminlerinin  $^{114}\text{Ru}$  çekirdeğini daha iyi açıkladığı görülmektedir.

Şekil 10, Şekil 12 ve Şekil 14 incelendiğinde; Z(4)-K model tahminlerinin,  $^{112}\text{Ru}$  izotopu ile çok iyi örtüştüğü,  $^{114}\text{Ru}$  izotopu ile uyumlu olduğu ve  $^{110}\text{Ru}$  izotopu ile alt spinlerde örtüştüğü üst spinlerde ise sapma meydana geldiği gözlemlendi. Şekil 11’de Z(4)-D modeli  $^{110}\text{Ru}$  çekirdeğini daha iyi açıklarken Şekil 15’de ise; Z(4)-K modeli  $^{114}\text{Ru}$  çekirdeğini daha iyi açıklar. Şekil 13’de ise Z(4)-K ve Z(4)-D modellerinden her ikisi de  $^{112}\text{Ru}$  çekirdeğini açıklamaktadır.

Şekil 16'da görüldüğü gibi,  $\beta_0 = 4.5$  değeri için Z(4)-K modelinin sayısal sonuçları  $^{128}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verileri ile  $L=12$  açısız momentum seviyesine kadar uyumludur.  $L \geq 14$  açısız momentum seviyelerinde sapma meydana geldiği görülür. Z(4) model tahminlerinin de  $^{128}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verileri ile  $L=12$  açısız momentum değerine kadar örtüştüğü görülmektedir ve Z(4) model tahminleri  $^{128}\text{Xe}$  çekirdeğini daha iyi açıklar. Şekil 17 incelendiğinde,  $L=12$  açısız momentum seviyesinde Z(4)-S model tahmininde sapma görülmektedir.  $\beta_0 = 4.5$  değeri için Z(4)-K modeli,  $^{128}\text{Xe}$  çekirdeğini daha iyi açıklamaktadır.

Şekil 18 incelendiğinde;  $^{130}\text{Xe}$  çekirdeğinin deneysel verilerinin,  $L=8$  açısız momentum seviyesine kadar  $\beta_0 = 2.9$  değeri için Z(4)-K model tahminlerinin ve Z(4) model tahminlerinin örtüştüğü görülmektedir. Yüksek spinli seviyelerde her üç modelde  $^{130}\text{Xe}$  çekirdeğini tam olarak açıklayamamaktadır. Şekil 19'a göre;  $L=8$  spin seviyesine kadar Z(4)-D, Z(4)-S ve  $\beta_0 = 2.9$  için Z(4)-K model tahminlerinin  $^{130}\text{Xe}$  çekirdeği ile uyumlu iken yüksek spinlere kadar  $^{130}\text{Xe}$  çekirdeğini en iyi açıklayan model Z(4)-D modelidir.

Şekil 20'de  $L=6$  açısız momentum seviyesine kadar  $\beta_0 = 1.52$  için Z(4)-K modelinin sayısal sonuçları  $^{132}\text{Xe}$  çekirdeği ile örtüştüğü görülmektedir. Şekil 21'de görüldüğü gibi;  $L=6$  spin seviyesine kadar Z(4)-S model tahminlerinin  $^{132}\text{Xe}$  çekirdek verileri ile örtüşür. Z(4)-S ve  $\beta_0 = 1.52$  için Z(4)-K modelleri, Z(4)-D model tahminlerine göre  $^{132}\text{Xe}$  çekirdeğini daha iyi açıklamaktadır.

Şekil 16, Şekil 18 ve Şekil 20 birlikte değerlendirildiğinde; Z(4)-K model tahminlerinin  $^{132}\text{Xe}$  çekirdeği ile örtüştüğü,  $^{128,130}\text{Xe}$  izotoplarının alt spin seviyelerinde uyumlu olduğu üst spin seviyelerinde sapma meydana geldiği gözlemlendi. Şekil 17, Şekil 19 ve Şekil 21'de görüldüğü üzere; Z(4)-K modeli  $^{128,132}\text{Xe}$  çekirdek yapısını iyi açıklarken, Z(4)-D modeli  $^{130}\text{Xe}$  çekirdek yapısını iyi açıklar.

Şekil 22 incelendiğinde; temel seviye bandına göre,  $L=10$  açısız momentum seviyesine kadar  $\beta_0 = 7.9$  değeri için Z(4)-K modelinin sayısal sonuçları  $^{192}\text{Pt}$  çekirdeğinin deneysel verileri ile örtüşmektedir. Şekil 23 incelendiğinde; Z(4)-D model tahminlerinin de  $^{192}\text{Pt}$  çekirdeğinin deneysel verileri ile örtüştüğü gözlemlenmiştir.

L=10 açısız momentum enerji seviyesine kadar  $\beta_0 = 8.1$  değeri için Z(4)-K model tahmin sonuçlarının  $^{194}\text{Pt}$  çekirdeğinin deneysel verileri ile örtüştüğü Şekil 24'de görölmektedir.  $^{194}\text{Pt}$  çekirdeğinin deneysel verilerinin, Z(4)-D model tahmin sonuçları ile L=10 açısız momentum enerji seviyesine kadar örtüştüğü fakat Z(4)-S model tahminlerinin L=4 açısız momentum enerji seviyesinden sonra uyumlu olmadığı Şekil 25'de görölmektedir.

$^{196}\text{Pt}$  çekirdeğinin deneysel verileri ile  $\beta_0 = 7.8$  değeri için Z(4)-K model tahminlerinin L=10 açısız momentum seviyesine kadar uyumlu olduğu Şekil 26'da görölmektedir. Z(4)-D model tahminlerinin L=10 açısız momentum enerji seviyesine kadar  $^{196}\text{Pt}$  çekirdeğinin deneysel verileri ile uyumlu olduğu gözlenmiştir. Z(4)-S model tahminleri ise ilk üç enerji seviyelerini açıkladığı Şekil 27'de görölmektedir.

L=8 açısız momentum enerji seviyesine kadar  $\beta_0 = 6.3$  değeri için Z(4)-K modelinin sayısal sonuçlarının  $^{198}\text{Pt}$  çekirdeğinin deneysel verileri ile eşleştiği Şekil 28'de gözlendi. Z(4)-D model tahminlerinin  $^{198}\text{Pt}$  çekirdeğinin deneysel verileri ile L=8 enerji seviyesine kadar uyumlu olduğu Şekil 29'da görölmektedir.

Şekil 22, Şekil 24, Şekil 26 ve Şekil 28'de  $^{192-196}\text{Pt}$  izotoplarının mevcut deneysel verileri Z(4)-K modeli ile çok iyi örtüşmektedir. Şekil 23, Şekil 25, Şekil 27 ve Şekil 29'da Z(4)-K model tahminleri ve Z(4)-D tahminleri  $^{192-196}\text{Pt}$  çekirdek yapılarını Z(4)-S modeline göre iyi açıkladığı görölmektedir.

Şekil 30 incelendiğinde;  $\beta_0 \rightarrow \infty$  değeri için Z(4)-K model tahminleri hem  $^{192}\text{Os}$  çekirdeği ile hem de RTR modeli ile örtüşür (bkz. Tablo 2). Bu sonuç,  $^{192}\text{Os}$  çekirdeğinin bir RTR model çekirdeği olduğunu göstermektedir. Şekil 31 incelendiğinde; Z(4)-D model tahminlerinin  $^{192}\text{Os}$  çekirdeğinin deneysel verileri ile L=12 açısız momentum enerji seviyelerine kadar örtüştüğü gözlenmiştir.

Şekil 30 ve Şekil 31 incelendiğinde; Z(4)-K ve Z(4)-D model tahminleri  $^{192}\text{Os}$  çekirdek yapısını iyi açıkladığı gözlendi.

Tablo 2'den görüldüğü üzere; Z(4)-K modeli için  $\beta_0 \rightarrow \infty$  limiti, gsb ve  $\gamma$  bantları RTR çekirdek yapısına karşılık gelirken,  $\beta_0 = 0$  özel durumda ise Z(4)-K model kabuk çekirdek yapısına karşılık gelir.

Tablo 3’de  $\gamma$  bandlarının numerik sonuçları,  $^{74-76}\text{Ge}$ ,  $^{110-114}\text{Ru}$ ,  $^{128-132}\text{Xe}$ ,  $^{192-196}\text{Pt}$ ,  $^{192}\text{Os}$  mevcut deneysel verilerin ve Z(4) model tahminlerinin  $\gamma$  band sonuçlarının karşılaştırılması verilmiştir.

Tablo 4’de ise  $\beta_1$  bandının enerji seviyelerinin numerik sonuçları bulunmaktadır.  $^{74-76}\text{Ge}$ ,  $^{110-114}\text{Ru}$ ,  $^{128-132}\text{Xe}$ ,  $^{192-196}\text{Pt}$ ,  $^{192}\text{Os}$  çekirdek verilerinin karşılaştırma yapacak kadar verisi bulunmamaktadır ve bazı çekirdek deneysel verilerin ise  $\beta$  bandları gözlenmemiştir.

Bu çalışmanın sonucunda elde edilen veriler ışığında, Z(4)-K model tahminlerinin Z(4) modeline göre deneysel verileri daha iyi açıkladığı söylenebilir.



## KAYNAKÇA

- Arfken, G., 1985. Laguerre Functions, Mathematical Methods for Physicists. Orlando, Florida, 721-731.
- Bayrak, O., Boztosun, I. ve Ciftci, H., 2007. Exact analytical solutions to the kratzer potential by the asymptotic iteration method. *International Journal of Quantum Chemistry*, 107, 540–544. DOI 10.1002/qua.21141.
- Bekdemir, C., Bekdemir, A. ve Han, J., 2006. Bound state solutions of the schrödinger equation for modified kratzer's molecular potential. *Chemical Physics Letters*, 417, 326-329.
- Berkdemir, C., 2012. Application of the Nikiforov-Uvarov Method in Quantum Mechanics.
- Bohr, A., 1952. The Coupling of Nuclear Surface Oscillations to the Motion of Individual Nucleons. *Dan. Mat. Fys. Medd.* 26, (14).
- Bohr, A. ve Mottelson, B.R., 1953. Collective and Individual-Particle Aspects of Nuclear Structure. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* 27 (16).
- Bonatsos, D., Lenis, D., Petrellis, D. ve Terziev, P.A., 2004. Z(5): Critical point symmetry for the prolate to oblate nuclear shape phase transition. *Physics Letters B*, 588, 172-179. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2004.03.029>
- Bonatsos, D., Lens, D., Petrellis, D., Terziev, P.A. ve Yigitoglu, I., 2005.  $\gamma$ -rigid solution of the Bohr Hamiltonian for  $\gamma = 30^\circ$  compared to the E(5) critical point symmetry. *Physics Letters B*, 621, 102-108. doi:10.1016/j.physletb.2005.06.047
- Bonatsos, D., Georgoudis P.E., Minkov, N., Petrellis, D. ve Quesne, C., 2013. Bohr Hamiltonian with deformation-dependent mass term for the kratzer potential. *Physics Letters C*, 88, 034316. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.88.034316>
- Boztosun, I., Bonatsos, D. ve Inci, I., 2008. Analytical solutions of the Bohr Hamiltonian with the morse potential. *Physical Review C*, 77, 044302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.77.044302>
- Buganu, P. ve Budaca, R., 2015. Analytical Solution for the Davydov-Chaban hamiltonian with a sextic potential for  $\gamma = 30^\circ$ . *Physical Review C*, 91, 014306. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.91.014306>
- Casten, R.F., 1990. Nuclear Structure From A Simple Perspective. *New York Oxford, Oxford University Press*, 391p.
- Casten, R.F., 2006. Shape phase transitions and critical-point phenomena in atomic nuclei. *Nature Physics*, 2(12), 811–820. Doi:10.1038/nphys451
- Casten, R.F. ve McCutchan, E.A., 2007. Quantum phase transitions and structural evolution in nuclei. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 34, R285-R320. doi:10.1088/0954-3899/34/7/R01

- Casten, R.F., 2009. Quantum phase transitions and structural evolution in nuclei. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 62, 183-209. doi:10.1016/j.pnpnp.2008.06.002
- Chabab, M., El Batoul A., Lahbas, A. ve Oulne, M., 2016. Electric quadrupole transitions of the Bohr Hamiltonian with Manning–Rosen potential. *Nuclear Physics A*, 953, 158-175. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2016.05.012>
- Cizewski, J.A., Casten, R.F., Smith, G.J., Stelts, M.L., Kane, W.R., Borner, H.G. ve Davidson, W.F., 1978. Evidence for a new symmetry in nuclei: the structure of  $^{196}\text{Pt}$  and the O(6) limit. *Physical Review Letters*, 40 (3), 167. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.40.167>
- Davydov, A.S. ve Filippov, G.F., 1958. Rotational states in even atomic nuclei. *Nuclear Physics*, 8, 237-249. [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(58\)90153-6](https://doi.org/10.1016/0029-5582(58)90153-6)
- Davydov, A.S. ve Rostovsky, V.S., 1959. Relative transition probabilities between rotational levels of non-axial nuclei. *Nuclear Physics*, 12, 58-68. [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(59\)90127-0](https://doi.org/10.1016/0029-5582(59)90127-0)
- Davydov, A.S. ve Chaban, A.A., 1960. Rotation-vibration interaction in non axial even nuclei. *Nuclear Physics A*, 20, 499-508. [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(60\)90191-7](https://doi.org/10.1016/0029-5582(60)90191-7)
- Fortunato, L., ve Vitturi A., 2004. New analytic solutions of the collective Bohr Hamiltonian for a  $\beta$ -Soft,  $\gamma$ -Soft axial rotor. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 30 (5), 627. DOI: 10.1088/0954-3899/30/5/006
- Fortunato, L., 2005. Solutions of the Bohr Hamiltonian, a compendium. *The European Physical Journal A*, 26, s01, 1-30. DOI: 10.1140/epjad/i2005-07-115-8. DOI: 10.1140/epjad/i2005-07-115-8
- Fortunato, L., De Baerdemacker, S. ve Heyde, K., 2006. Solution of the Bohr Hamiltonian for soft triaxial nuclei. *Physical Review C*, 74, 014310. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.74.014310>
- Gizon, J., Gizon, A., Diamond, R.M. ve Stephens, F.S., 1978. Prolate-oblate transition in Nd isotopes. *Journal of Physics. G: Nuclear Physics*, 4(7), L171. DOI: 10.1088/0305-4616/4/7/004
- Iachello F., 1979. Group theoretical methods in physics. *Lecture Notes in Physics*, edited by A. Böhm (Lange Springer, Berlin, ), 94, 420. [https://doi.org/10.1007/3-540-09238-2\\_3](https://doi.org/10.1007/3-540-09238-2_3)
- Iachello, F. ve Arima, A., 1987. The Interacting Boson Model. *Cambridge University Press*, Cambridge, England.
- Iachello, F. ve Levine, R.D., 1995. Algebraic Theory of Molecules. *Oxford University Press.*, Oxford, England.

- Iachello, F., 2000. Dynamic symmetries at the critical point. *Physical Review Letters*, 85 (17), 3580-3583. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.3580>
- Iachello, F., 2001. Analytic description of critical point nuclei in a spherical-axially deformed shape phase transition. *Physical Review Letters*, 87 (5), 052502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.052502
- Iachello, F., 2003. Phase transitions in angle variables. *Physical Review Letters*, 91, 132502. DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.132502>
- Kotb, M., 2016. U(5)-SU(3) Nuclear shape transition with in the interacting boson model applied to dysprosium isotopes. *Physics of Particles and Nuclei Letters*, 13(4), 451–459. DOI: 10.1134/S1547477116040075
- Kratzer, A., 1920. Die ultraroten Rotationsspektren der Halogenwasserstoffe. *Zeitschrift für Physik*, 3, 289.
- Le Roy, R.J. ve Bernstein, R.B., 1970. Dissociation energy and long-range potential of diatomic molecules from vibrational spacings of higher levels. *The Journal of Chemical Physics*, 52, 3869.
- Meyer-ter-Vehn, J. 1975. Collective model description of transitional odd-A nuclei, The triaxial-rotor-plus-particle model, *Nuclear Physics A*, 249, 111-140. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(75\)90095-0](https://doi.org/10.1016/0375-9474(75)90095-0)Get rights and content
- Naderi, L. ve Hassanabadi H., 2016. Bohr Hamiltonian with Eckart potential for triaxial nuclei. *The European Physical Journal Plus*, 131, 133. DOI 10.1140/epjp/i2016-16005-y
- Nikiforov, A.F. ve Uvarov V.B., 1988. Special Functions of Mathematical Physics. Birkhauser, Basel.
- Podolsky, B., 1928. Quantum-Mechanically correct form of hamiltonian function for conservative systems. *Physical Review*, 32, 812-816. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.32.812>
- Scharff -Goldhaber, G. ve Weneser, J.J., 1955. System of even-even nuclei. *Physical Review*, 98, 212–214. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.98.212>
- Sitenko, A.G. ve Tartakovski, V.K., 1975. *Lectures on the Theory of the Nucleus*. Pergamon, Oxford.
- Sobhani, H. and Hassanabadi, H., 2016. Study of Davydov–Chaban approach considering shifted Killingbeck potential for any  $l$ -state. *Modern Physics Letters A*, 31, 1650152. <https://doi.org/10.1142/S0217732316501522>
- Sobhani, H. ve Hassanabadi, H., 2017. Electric quadrupole transitions for some isotopes of Xenon; considering rigidity for  $\gamma=30^\circ$  collective parameter. *Nuclear Physics A*, 957, 177–183. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2016.08.009>
- Szego, G., 1959. Orthogonal Polynomials. *American Mathematical Society*, New York.

- Tezcan, C., ve Sever, R., 2009. A General Approach for the Exact Solution of the Schrödinger Equation. *International Journal of Theoretical Physics*, 48, 337–350. DOI 10.1007/s10773-008-9806-y
- Wilets, L. ve Jean, M., 1956. Surface oscillations in even-even nuclei. *Physical Review*. 102, 788–796. DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRev.102.788>
- Yigitoglu, I. ve Bonatsos, D., 2011. Bohr Hamiltonian with Davidson potential for triaxial nuclei. *Physical Review C*, 83, 014303. DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevC.83.014303>
- Yigitoglu, I. ve Gokbulut, M., 2018. Bohr Hamiltonian for  $\gamma=30^\circ$  with Davidson potential. *European Physical Journal Plus*, 133, 129. DOI:10.1140/epjp/i2018-11969-0
- Zamfir N.V., ve Casten R.F., 1991. Signatures of  $\gamma$  softness or triaxiality in low energy nuclear spectra. *Physics Letters B*, 260, 265-270. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(91\)91610-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)91610-8)



**ISBN: 978-625-367-895-1**